

Differential Properties of Geometric Object

Aleks Kleyn

E-mail address: Aleks_Kleyn@MailAPS.org

URL: <http://sites.google.com/site/alekskleyn/>

URL: http://arxiv.org/a/kleyn_a_1

URL: <http://AleksKleyn.blogspot.com/>

ABSTRACT. In this book, I explored differential equations for covariant and contravariant representations of group Lie in a vector space. In the transition to the tangent bundle of a differentiable manifold we obtain the theory of parallel transport of a geometric object.

Contents

Chapter 1. Introduction	5
1.1. About This Book	5
1.2. Conventions	5
Chapter 2. Differential Equations	7
2.1. Completely Integrable Systems	7
2.2. Linear Differential Operator	8
2.3. Complete System of Linear Partial Differential Equations	9
2.4. Essential Parameters in a Set of Functions	11
Chapter 3. Lie Group	15
3.1. Lie Group Composition	15
3.2. 1-Parameter Group	18
3.3. Right Shift	20
3.4. Left Shift	22
3.5. Relation between Algebras Lie \mathfrak{g}_l and \mathfrak{g}_r	24
Chapter 4. Representation of Lie Group	27
4.1. Representation of Lie Group	27
4.2. Algebraic Properties of Representation	28
4.3. Linear Representation of Lie Group	30
4.4. Algebraic Properties of Linear Representation	31
Chapter 5. Differential Properties of Geometric Object	33
5.1. Covariant Derivative	33
5.2. Lie Derivative	33
Chapter 6. References	35
Chapter 7. Index	36
Chapter 8. Special Symbols and Notations	37

CHAPTER 1

Introduction

1.1. About This Book

This book is based on the research project that I performed during my study in the Odessa university. I was very lucky that my teacher Gavrilchenko Michail Leonidovich provided lectures "Lie Group and Lie Algebra". These lectures were based on the book [2]. Later on, I wrote down the equations of a Lie group for the particular case of the representation of the group GL in the vector space of geometric objects.

If we consider tangent bundle to the differentiable manifold, then movement from a fiber into fiber generates the continuous set of transformations. Combining the differential equations of this set of transformations and differential equations of the geometric object, we get the equation of parallel transport of the geometric object.

Subsequently, I replaced the group GL by an arbitrary Lie group. This is the form that I used to present theory in this book. Accordingly, chapters of the book have the following contents. Representation of a Lie group is closely connected with the theory of differential equations. In the chapter 2, I give a brief lecture of the theory of differential equations. I dedicated this lecture to completely integrable systems of differential equations. In the chapter 3, I write down the differential equations for a Lie group. I write down differential equations of the representation of Lie group in the chapter 4.

1.2. Conventions

- (1) Without a doubt, the reader of my articles may have questions, comments, objections. I will appreciate any response.

CHAPTER 2

Differential Equations

2.1. Completely Integrable Systems

Consider^{2.1} a system of nm partial differential equations

$$(2.1.1) \quad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} = \psi_i^\alpha(\theta^1, \dots, \theta^m, x^1, \dots, x^n) = \psi_i^\alpha(\theta, x)$$

$$1 \leq \alpha \leq m \quad 1 \leq i \leq n \quad \theta^\alpha = \theta^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

This system is solved relative all partial derivatives and is equivalent to system of total differential equations

$$d\theta^\alpha = \psi_i^\alpha(\theta, x) dx^i$$

To find conditions of integrability we differentiate (2.1.1) with respect to x^j .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^j} = \\ &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_j^\sigma \\ \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_i^\sigma \end{aligned}$$

Because second derivative of continuous function does not depend on order of differentiation we expect that

$$(2.1.2) \quad \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_j^\sigma = \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_i^\sigma$$

Definition 2.1.1. We call the system of differential equations (2.1.1) **completely integrable system** if condition (2.1.2) is satisfied identically. \square

Solution of completely integrable system (2.1.1) has Taylor expansion

$$(2.1.3) \quad \theta^\alpha = C^\alpha + \left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} \right)_{x=x_0} (x^i - x_0^i) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \right)_{x=x_0} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \dots$$

Here C^α ($1 \leq \alpha \leq m$) are constants,

$$\left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} \right)_{x=x_0} = \psi_i^\alpha(C^1, \dots, C^m, x_0^1, \dots, x_0^n)$$

We obtain the rest coefficients by differentiating of right part of (2.1.1) and substituting C^α and x_0^i . We tell about solution when expansion (2.1.3) converges. According to theorem by Caushi and Covalevskaya it has place when ψ_i^α are analytical by all arguments.

^{2.1}I wrote this chapter under influence of [2]

For the vicinity of point (x_0^1, \dots, x_0^n) for which series (2.1.3) are convergent we have a solution

$$(2.1.4) \quad \theta^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, \dots, x^n, C^1, \dots, C^m)$$

determined by m constants.

It is possible that condition (2.1.2) is not satisfied identically. Then system of differential equations (2.1.1) is not completely integrable and equation (2.1.2) puts constraints on functions θ^α . Therefore functions θ^α satisfy (2.1.1) and (2.1.2). Assume that (2.1.2) put S_1 constraints. We differentiate them with respect to x^k and get new S_2 equations. If these equations are not satisfied identically we can repeat this process soon.

Because we cannot have more than m constraints, this chain breaks. If system of differential equations (2.1.1) has solution this solution satisfies all constraints, otherwise these constraints are conflicting.

Theorem 2.1.2. *Necessary and sufficient condition in order that system of differential equations (2.1.1) has solution is existing of such N that S_1, \dots, S_N are algebraically compatible, and S_{N+1} is consequence of them. If we get p constraints then common solution depends on $m - p$ arbitrary constants.*

PROOF. We proved that this condition is necessary. Now we show that this condition is sufficient. Assume we got p constraints

$$(2.1.5) \quad \Phi^\gamma(\theta, x) = 0 \quad \gamma = 1, \dots, p$$

Because

$$Rg \left\| \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial \theta^\alpha} \right\| = p$$

we can express p variables θ^α through others using (2.1.5). If we enumerate variables by right way we get

$$(2.1.6) \quad \theta^\nu = \phi^\nu(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x) \quad \nu = 1, \dots, p$$

We substitute (2.1.6) into (2.1.1) and get

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} = \bar{\psi}_i^\alpha(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x^1, \dots, x^n) \quad \alpha = p+1, \dots, m$$

The condition (2.1.2) is satisfied. System of differential equations (2.1.7) is completely integrable and has solution that depends on $m - p$ arbitrary constants. First p equations are fulfilled because of (2.1.6) when $\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x$ are solutions of (2.1.7). \square

2.2. Linear Differential Operator

Let us have r differential operators

$$(2.2.1) \quad X_a f = \xi_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Operator (2.2.1) is linear

$$\begin{aligned} X_a(f + g) &= X_a f + X_a g \\ X_a(\lambda f) &= \lambda X_a f \quad \lambda = \text{const} \end{aligned}$$

The product of these operators has form

$$\begin{aligned} X_a X_b f &= X_a (X_b f) = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\xi_b^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \xi_a^i \frac{\partial \xi_b^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \xi_a^i \xi_b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^j} X_a \xi_b^j + \xi_a^i \xi_b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned}$$

We used (2.2.1) on the last step. This is not operator of type (2.2.1). However because second term is symetric relative a and b we can introduce commutator

$$(2.2.2) \quad (X_a, X_b)f = X_a X_b f - X_b X_a f = (X_a \xi_b^j - X_b \xi_a^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

This is linear operation and we call it Puason brackets. Skew symmetry of this commutator follows from (2.2.2).

Simple calculation shows that

$$\begin{aligned} (2.2.3) \quad ((X_a, X_b), X_c)f &= ((X_a, X_b)\xi_c^j - X_c(X_a \xi_b^j - X_b \xi_a^j)) \frac{\partial f}{\partial x^j} = \\ &= \left(\frac{\partial \xi_c^j}{\partial x^k} X_a \xi_b^k - \frac{\partial \xi_c^j}{\partial x^k} X_b \xi_a^k - \frac{\partial \xi_b^j}{\partial x^k} X_c \xi_a^k + \xi_c^p \xi_a^q \frac{\partial^2 \xi_b^j}{\partial x^p \partial x^q} + \frac{\partial \xi_a^j}{\partial x^k} X_c \xi_b^k + \xi_c^p \xi_b^q \frac{\partial^2 \xi_a^j}{\partial x^p \partial x^q} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

If we change order of parameters we finally get equation

$$(2.2.4) \quad ((X_a, X_b), X_c)f + ((X_b, X_c), X_a)f + ((X_c, X_a), X_b)f = 0$$

(2.2.4) is Jacoby condition.

Theorem 2.2.1. *Commutator of linear combination of operators*

$$X'_a = \lambda_a^b X_b$$

where λ_a^b are functions of x expresses through these operators and their commutators

$$(2.2.5) \quad (X'_a, X'_c)f = \mu_{ac}^d X_d f - \mu_{ca}^d X_d f + \lambda_a^b \lambda_c^d (X_b, X_d)f$$

PROOF. Commutator has form

$$\begin{aligned} (2.2.6) \quad (X'_a, X'_c)f &= (\lambda_a^b X_b, \lambda_c^d X_d)f \\ &= \lambda_a^b X_b (\lambda_c^d X_d f) - \lambda_c^d X_d (\lambda_a^b X_b f) \\ &= \lambda_a^b X_b \lambda_c^d X_d f + \lambda_a^b \lambda_c^d X_b X_d f - \lambda_c^d X_d \lambda_a^b X_b f - \lambda_c^d \lambda_a^b X_d X_b f \end{aligned}$$

(2.2.5) follows from (2.2.6) if we assume

$$\mu_{ac}^d = \lambda_a^b X_b \lambda_c^d$$

□

2.3. Complete System of Linear Partial Differential Equations

Now we want to learn system of differential equations

$$(2.3.1) \quad X_a f = 0 \quad X_a = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq a \leq r$$

We assume that

$$(2.3.2) \quad \text{rank } \|\xi_a^i\| = r \leq n$$

This means that equations (2.3.1) are line independent.

If $r = n$, the only solution is evidently $f = \text{const}$. Statement that every solution of equations (2.3.1) is also solution of equation

$$(2.3.3) \quad (X_a, X_b)f = 0$$

follows from (2.2.2). If

$$(2.3.4) \quad (X_a, X_b)f = \gamma_{ab}^c X_c f$$

where the γ are functions of x , then system of differential equations (2.3.1) and (2.3.3) is equivalent to system of differential equations (2.3.1). We do not know in advance whether (2.3.3) set new constraints for (2.3.1). We adjoin to system of differential equations (2.3.1) those equations of system (2.3.3) which do not hold (2.3.4). We obtain s equations, $s \geq r$. We repeat the same procedure for new system and obtain t equations, $t \geq s$, and so on.

As result of the sequence of indicated actions we may get n equations. In this case the system of differential equations (2.3.1) has the only solution $f = \text{const}$, because

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

Otherwise we get u equations, $u \leq n$, which hold condition (2.3.4). In this case obtained system of differential equations is called **complete** of order u . Solution of the system of differential equations (2.3.1) is solution of complete system of differential equations.

Theorem 2.3.1. *If system of differential equations (2.3.1) is a complete system, so also is*

$$(2.3.5) \quad X_a' f = \lambda_a^b X_b f = 0$$

where λ are functions of x

$$(2.3.6) \quad \det \|\lambda_a^b\| \neq 0 \quad 1 \leq a, b \leq r$$

PROOF. From (2.3.4) it follows that the right-hand member of (2.2.5) is linear in $X_a f$. According to (2.3.5), (2.3.6) $X_a f$ is linear in operators $X_a' f$. Therefore, we have from (2.2.5) expressions of the form (2.3.4), which proves the statement. \square

Since (2.3.2), there is no loss in generality in assuming that

$$(2.3.7) \quad \det \|\xi_a^i\| \neq 0 \quad 1 \leq i, a \leq r$$

Hence we may solve system of differential equations (2.3.1) for $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^r}$ and write the result in the form

$$(2.3.8) \quad X_a' f = \frac{\partial f}{\partial x^a} + \psi_a^t \frac{\partial f}{\partial x^t} = 0 \quad a = 1, \dots, r \quad t = r+1, \dots, n$$

These equations are of the form (2.3.5) and, hence, form system of differential equations equivalent to system (2.3.1).

Complete system of differential equations expressed in the form (2.3.8) is called **Jacobian**.

Theorem 2.3.2. *Complete system of differential equations (2.3.1) admits exactly $n - r$ independent solutions.*

PROOF. Similarly to equation (2.3.4), we have

$$(2.3.9) \quad (X'_a, X'_b)f = \gamma'_{ab} X'_c f$$

From (2.2.2) and (2.3.8), it follows that

$$(2.3.10) \quad (X'_a, X'_b)f = (X_a \psi_b^t - X_b \psi_a^t) \frac{\partial f}{\partial x^t} \quad t = r+1, \dots, n$$

Since $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^r}$ do not appear in (2.3.10), $\gamma'_{ab} = 0$. Hence, we get for complete system in the Jacobian form

$$(2.3.11) \quad \begin{aligned} (X'_a, X'_b)f &= 0 \\ X_a \psi_b^t - X_b \psi_a^t &= 0 \\ \frac{\partial \psi_b^p}{\partial x^a} + \psi_a^q \frac{\partial \psi_b^p}{\partial x^q} &= \frac{\partial \psi_a^p}{\partial x^b} + \psi_b^q \frac{\partial \psi_a^p}{\partial x^q} \quad a, b = 1, \dots, r \quad p, q = r+1, \dots, n \end{aligned}$$

Comparing (2.3.11) and (2.1.2), we see that system of differential equations

$$(2.3.12) \quad \frac{\partial x^p}{\partial x^a} = \psi_a^p \quad a = 1, \dots, r \quad p = r+1, \dots, n$$

is completely integrable. According to theorem 2.1.2 system of differential equations (2.3.8), and consequently, system of differential equations (2.3.1) admit $n - r$ independent solutions, and system of differential equations (2.3.1) does not admit more than $n - r$ independent solutions. \square

2.4. Essential Parameters in a Set of Functions

Definition 2.4.1. Consider n functions

$$f^i(x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^r), i = 1, \dots, n$$

of variables x^1, \dots, x^n and parameters a^1, \dots, a^r . We assume that functions f^i are continuous in x^1, \dots, x^n and a^1, \dots, a^r . Also their derivatives up to any order are continuous. Parameters a^1, \dots, a^r are called **essential parameters** unless there are functions A^1, \dots, A^{r-1} of a^1, \dots, a^r such that we have identically

$$(2.4.1) \quad f^i(x, a) = F^i(x, A)$$

\square

Theorem 2.4.2. A necessary and sufficient condition that the r parameters a^α be essential is that the functions f^i do not satisfy an equation of the form

$$(2.4.2) \quad \phi^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} = 0$$

where $\phi^\alpha \neq 0$.

PROOF. Assume that parameters a are not essential. Then there exist A such that (2.4.1) is satisfied and

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial A^\sigma}{\partial a^\alpha} \right\| < r$$

Therefore there exist functions $\phi^\alpha(a) \neq 0$ such that

$$\phi^\alpha \frac{\partial A^\sigma}{\partial a^\alpha} = 0$$

Hence functions A^1, \dots, A^{r-1} and any their function $\Phi(A)$ also satisfy (2.4.2). Functions F^i in (2.4.1) are example of function Φ . Therefore if f^i do not essentially depend on a^α they satisfy system (2.4.2).

Conversely, suppose that functions f^i satisfy equation (2.4.1) for some functions ϕ^α . This equation admits $r - 1$ independent solutions A^1, \dots, A^{r-1} which are functions of a^α alone and any solution of (2.4.2) is function of A^1, \dots, A^{r-1} . Therefore, each of functions f^i is a function of x^1, \dots, x^n and A^1, \dots, A^{r-1} and a^1, \dots, a^r are not essential. \square

Remark 2.4.3. From theorem 2.4.2, it follows that, if the functions f^i satisfy a complete system of s differential equations

$$(2.4.3) \quad \phi_\sigma^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, r \quad \sigma = 1, \dots, s < r$$

then f^i are functions of x and of $r - s$ independent solutions of system (2.4.3), which are functions of the a , and consequently f^i are expressible in terms of $r - s$ essential parameters. \square

We may interpret the system of equations (2.4.2) as system of linear equations for ϕ^α . From linear algebra, it follows, that solutions of system (2.4.3) form a vector space, and only in case of condition

$$(2.4.4) \quad \mu_0 = \text{rank} \left(\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} \right) = r$$

the system of linear equations (2.4.3) has the only solution $\phi^\alpha = 0$. Thus, from remark 2.4.3, it follows, that parameters are essential, if condition (2.4.4) is satisfied.

Suppose that $\mu_0 < r$. Differentiating the system of differential equations (2.4.2) with respect to the x^j , we have

$$(2.4.5) \quad \phi^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} = 0 \quad \phi^\alpha \frac{\partial f_{,j}^i}{\partial a^\alpha} = 0 \quad f_{,j}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

Let

$$(2.4.6) \quad \mu_1 = \text{rank} \left(\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} \quad \frac{\partial f_{,j}^i}{\partial a^\alpha} \right)$$

Evidently $\mu_1 \geq \mu_0$. If $\mu_1 = r$, the system of linear equations (2.4.5) admits the only solution $\phi^\alpha = 0$. Consequently the parameters are essential.

If we put

$$f_{,j_1 \dots j_s}^i = \frac{\partial^s f^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}}$$

we have from (2.4.2) by repeated differentiation

$$(2.4.7) \quad \phi^\alpha \frac{\partial f_{,j_1 \dots j_s}^i}{\partial a^\alpha} = 0$$

We denote

$$(2.4.8) \quad \mu_s = \text{rank} \left(\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} \quad \frac{\partial f_{,j}^i}{\partial a^\alpha} \quad \dots \quad \frac{\partial f_{,j_1 \dots j_s}^i}{\partial a^\alpha} \right)$$

We get thus a sequence of ranks

$$(2.4.9) \quad \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_s \leq \dots \leq r$$

Theorem 2.4.4. *The number of essential parameters in terms of which the functions $f^i(x, a)$ are expressible is equal to the maximum number attained in the sequence (2.4.9).*

PROOF. If any μ_s is equal to r , $\phi^\alpha = 0$ and r parameters are essential.

Suppose that $\mu_{s-1} < r$ and $\mu_s = \mu_{s-1}$. From this statement, it follows that

$$(2.4.10) \quad \frac{\partial f^i_{,j_1 \dots j_s}}{\partial a^\alpha} = \sum_{t < s} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \frac{\partial f^i_{,k_1 \dots k_t}}{\partial a^\alpha}$$

Differentiating equation (2.4.10) with respect to x^p , we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^i_{,j_1 \dots j_s p}}{\partial a^\alpha} &= \sum_{t < s} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \frac{\partial f^i_{,k_1 \dots k_t p}}{\partial a^\alpha} \\ &= \sum_{t < s-1} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \frac{\partial f^i_{,k_1 \dots k_t p}}{\partial a^\alpha} + \sum_{t=s-1, u < s} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \lambda_{k_1 \dots k_t p}^{l_1 \dots l_u} \frac{\partial f^i_{,l_1 \dots l_u}}{\partial a^\alpha} \end{aligned}$$

Therefore, $\mu_{s+1} = \mu_{s-1}$.

If $\mu_s < r$, the system of linear equations (2.4.2), (2.4.7) has rank μ_s , then $r - \mu_s$ of the functions ϕ^α may be chosen arbitrary and the others are then determined. Let $\phi^1, \dots, \phi^{r-\mu_s}$ be functions of a but not the x . Then

$$\phi^\sigma = \lambda_\rho^\sigma \phi^\rho \quad \rho = 1, \dots, r - \mu_s \quad \sigma = r - \mu_s + 1, \dots, r$$

where λ are functions of x and a . There are accordingly $r - \mu_s$ independent equations (2.4.2). The commutator of any two equations equated to 0 admits f^i as solution and hence it must be a linear combination of the given equations. Therefore, these equations form a complete system. Hence the functions are expressible in terms of μ_s essential parameters. \square

CHAPTER 3

Lie Group

3.1. Lie Group Composition

Let G be an r -parameter Lie group with an operation

$$(3.1.1) \quad a_3^L = \varphi^L(a_1, a_2) \quad a_3 = a_1 a_2$$

and neutral element e .

All operators that we introduce below have relation to left and right shift representations and will have an additional index r or l telling us what kind of shift they describe.

First of all we introduce operators

$$(3.1.2) \quad A_{rL}^K(a, b) = \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial b^L}$$

$$(3.1.3) \quad A_{lL}^K(a, b) = \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial a^L}$$

as derivative of left and right shifts.

Theorem 3.1.1.

$$(3.1.4) \quad A_r(a, bc) A_r(b, c) = A_r(ab, c)$$

$$(3.1.5) \quad A_l(ab, c) A_l(a, b) = A_l(a, bc)$$

PROOF. The operation is associative

$$(3.1.6) \quad a(bc) = (ab)c$$

Using chain rule we can find the derivatives of this equation

$$(3.1.7) \quad \frac{\partial a(bc)}{\partial bc} \frac{\partial bc}{\partial c} = \frac{\partial (ab)c}{\partial c}$$

$$(3.1.8) \quad \frac{\partial a(bc)}{\partial a} = \frac{\partial (ab)c}{\partial ab} \frac{\partial ab}{\partial a}$$

(3.1.4) follows from (3.1.7). (3.1.5) follows from (3.1.8). □

Because $ae = a$ and $eb = b$ we get equations

$$(3.1.9) \quad A_{lL}^K(a, e) = \delta_L^K$$

$$(3.1.10) \quad A_{rL}^K(e, b) = \delta_L^K$$

Theorem 3.1.2. Operator $A_l(a, b)$ has the inverse operator $A_l(ab, b^{-1})$

$$(3.1.11) \quad A_l^{-1}(a, b) = A_l(ab, b^{-1})$$

Operator $A_r(b, c)$ has the inverse operator $A_r(b^{-1}, bc)$

$$(3.1.12) \quad A_r^{-1}(b, c) = A_r(b^{-1}, bc)$$

PROOF. According (3.1.4) we get $(a = b^{-1})$

$$(3.1.13) \quad A_r(b^{-1}, bc)A_r(b, c) = A_r(b^{-1}b, c) = A_r(e, c) = \delta$$

(3.1.12) follows from (3.1.13).

According (3.1.5) we get $(c = b^{-1})$

$$(3.1.14) \quad A_l(ab, b^{-1})A_l(a, b) = A_l(a, bb^{-1}) = A_l(a, e) = \delta$$

(3.1.11) follows from (3.1.14). □

Theorem 3.1.3. *Operators $A_l(a, b)$ and $A_r(a, b)$ are invertible.*

PROOF. This is consequence of theorem 3.1.2. □

We introduce **Lie group basic operators**

$$(3.1.15) \quad \psi_r^L(a) = A_r^L(a, e) \quad \psi_r(a) = A_r(a, e)$$

$$(3.1.16) \quad \psi_l^L(b) = A_l^L(e, b) \quad \psi_l(b) = A_l(e, b)$$

From (3.1.9) and (3.1.10) immediately follows that

$$(3.1.17) \quad \psi_l^K(e) = \delta_L^K$$

$$(3.1.18) \quad \psi_r^K(e) = \delta_L^K$$

By definition basic operators linearly map the tangent plane $T_e G$ into the tangent plane $T_a G$.

Theorem 3.1.4. *Operators ψ_l and ψ_r are invertible.*

PROOF. This is consequence of theorem 3.1.3 and definitions (3.1.16) and (3.1.15). □

Because operators ψ_r and ψ_l have inverse operators we introduce operators

$$(3.1.19) \quad \lambda_r(a) = \psi_r^{-1}(a)$$

$$(3.1.20) \quad \lambda_l(a) = \psi_l^{-1}(a)$$

which map $T_a G \rightarrow T_e G$

Theorem 3.1.5.

$$(3.1.21) \quad \lambda_r(a) = A_r(a^{-1}, a)$$

$$(3.1.22) \quad \lambda_l(a) = A_l(a, a^{-1})$$

PROOF. According (3.1.20), (3.1.16) and (3.1.11) we get

$$\lambda_l(a) = A_l^{-1}(e, a) = A_l(a, a^{-1})$$

This proves (3.1.22).

According (3.1.19), (3.1.15) and (3.1.12) we get

$$\lambda_r(a) = A_r^{-1}(a, e) = A_r(a^{-1}, a)$$

This proves (3.1.21). □

Theorem 3.1.6.

$$(3.1.23) \quad A_r(a, b) = \psi_r(ab)\lambda_r(b)$$

$$(3.1.24) \quad A_l(a, b) = \psi_l(ab)\lambda_l(a)$$

PROOF. Assume $c = e$ in (3.1.4)

$$(3.1.25) \quad A_r(a, b)A_r(b, e) = A_r(ab, e)$$

From equations (3.1.15), (3.1.25), it follows that

$$(3.1.26) \quad A_r(a, b)\psi_r(b) = \psi_r(ab)$$

From (3.1.26) follows

$$(3.1.27) \quad A_r(a, b) = \psi_r(ab)\psi_r^{-1}(b)$$

(3.1.23) follows from (3.1.27) using (3.1.19).

Assume $a = e$ into (3.1.5)

$$(3.1.28) \quad A_l(b, c)A_l(e, b) = A_l(e, bc)$$

From equations (3.1.16), (3.1.28), it follows that

$$(3.1.29) \quad A_l(b, c)\psi_l(b) = \psi_l(bc)$$

From (3.1.29) follows

$$(3.1.30) \quad A_l(a, b) = \psi_l(ab)\psi_l^{-1}(a)$$

(3.1.24) follows from (3.1.30) using (3.1.20). \square

Theorem 3.1.7. *The Lie group operation satisfies to differential equations*

$$(3.1.31) \quad \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial b^L} = \psi_r^K(ab)\lambda_r^T(b) \quad \frac{\partial ab}{\partial b} = \psi_r(ab)\lambda_r(b)$$

$$(3.1.32) \quad \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial a^L} = \psi_l^K(ab)\lambda_l^T(a) \quad \frac{\partial ab}{\partial a} = \psi_l(ab)\lambda_l(a)$$

PROOF. (3.1.31) is consequence of (3.1.23) and (3.1.2). (3.1.32) is consequence of (3.1.24) and (3.1.3). \square

Theorem 3.1.8.

$$(3.1.33) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\psi_l(a^{-1})\lambda_r(a)$$

$$(3.1.34) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\psi_r(a^{-1})\lambda_l(a)$$

PROOF. Differentiating the equation $e = a^{-1}a$ with respect to a , we get the equation

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial a^{-1}a}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} + \frac{\partial a^{-1}a}{\partial a} = \\ &= A_l(a^{-1}, a) \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} + A_r(a^{-1}, a) \\ \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} &= -A_l^{-1}(a^{-1}, a)A_r(a^{-1}, a) \end{aligned}$$

Using (3.1.21) and (3.1.22) we get

$$(3.1.35) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\lambda_l^{-1}(a^{-1})\lambda_r(a)$$

(3.1.33) follows from (3.1.35).

Differentiating the equation $e = aa^{-1}$ with respect to a , we get the equation

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial aa^{-1}}{\partial a} + \frac{\partial aa^{-1}}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = \\ &= A_l(a, a^{-1}) + A_r(a, a^{-1}) \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} \\ \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} &= -A_r^{-1}(a, a^{-1}) A_l(a, a^{-1}) \end{aligned}$$

Using (3.1.21) and (3.1.22) we get

$$(3.1.36) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\lambda_r^{-1}(a^{-1}) \lambda_l(a)$$

(3.1.34) follows from (3.1.36). □

Theorem 3.1.9.

$$(3.1.37) \quad \frac{\partial a^{-1}b}{\partial a} = -\psi_l(a^{-1}b) \psi_r^{-1}(a)$$

$$(3.1.38) \quad \frac{\partial ba^{-1}}{\partial a} = -\psi_r(ba^{-1}) \psi_l^{-1}(a)$$

PROOF. Using the chain rule and equations (3.1.24), (3.1.33) we get

$$\begin{aligned} (3.1.39) \quad \frac{\partial a^{-1}b}{\partial a} &= \frac{\partial a^{-1}b}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} \\ &= -A_l(a^{-1}, b) \psi_l(a^{-1}) \lambda_r(a) \\ &= -\psi_l(a^{-1}b) \psi_l^{-1}(a^{-1}) \psi_l(a^{-1}) \lambda_r(a) \end{aligned}$$

(3.1.37) follows from (3.1.39).

Using the chain rule and equations (3.1.23), (3.1.34) we get

$$\begin{aligned} (3.1.40) \quad \frac{\partial ba^{-1}}{\partial a} &= \frac{\partial ba^{-1}}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} \\ &= -A_r(b, a^{-1}) \psi_r(a^{-1}) \lambda_l(a) \\ &= -\psi_r(ba^{-1}) \psi_r^{-1}(a^{-1}) \psi_r(a^{-1}) \lambda_l(a) \end{aligned}$$

(3.1.38) follows from (3.1.40). □

3.2. 1-Parameter Group

If the manifold of the group has the dimension 1, we have the group that depends on 1 parameter. In this case the operation on the group is just

$$c = \varphi(a, b)$$

where a, b, c are numbers. In this case our notation will be simplified. We have not operators but functions

$$\begin{aligned} A_l(a, b) &= \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a} \\ A_r(a, b) &= \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \end{aligned}$$

which by the definition satisfy equations

$$A_l(a, e) = 1$$

$$A_r(e, b) = 1$$

As well we introduce basic functions

$$\psi_r(a) = A_r(a, e)$$

$$\psi_l(b) = A_l(e, b)$$

Functions $\psi_r(a)$ and $\psi_l(a)$ never turn to 0 and

$$\lambda_r(a) = \frac{1}{\psi_r(a)}$$

$$\lambda_l(a) = \frac{1}{\psi_l(a)}$$

Theorem 3.2.1. *The operation on the 1-parameter Lie group satisfies to differential equations*

$$(3.2.1) \quad \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} = \frac{\psi_r(ab)}{\psi_r(b)}$$

PROOF. This is consequence of (3.1.31). \square

Theorem 3.2.2. *On the 1-parameter group we can introduce such coordinate A that the operation Φ on the group has form*

$$(3.2.2) \quad \Phi(A, B) = A + B$$

and the identity of the group is $E = 0$.

PROOF. We introduce a new variable A such that

$$(3.2.3) \quad dA = \frac{da}{\psi_r(a)}$$

Because $\psi_r(a) \neq 0$ 1-1 map $A = F(a)$ and its inverse map $a = f(A)$ exist. This means that if $A = F(a)$, $B = F(b)$, $C = F(c)$ and $c = \varphi(a, b)$ then there exist a function Φ such that

$$C = \Phi(A, B) = F(\varphi(a, b))$$

Now we have derivative

$$\frac{\partial \Phi(A, B)}{\partial B} = \frac{dC}{dc} \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \frac{db}{dB}$$

Using (3.2.3) and (3.2.1) we get

$$\frac{\partial \Phi(A, B)}{\partial B} = \frac{1}{\psi_r(c)} \frac{\psi_r(c)}{\psi_r(b)} \psi_r(b) = 1$$

Thus we have

$$(3.2.4) \quad \Phi(A, B) = \xi(A) + B$$

If we get the solution of equation (3.2.3) in the form

$$A = \int_e^a \frac{da}{\psi_r(a)}$$

then we see that the identity of group is $A = 0$. If we assume $B = 0$ in (3.2.4) we get

$$(3.2.5) \quad A = \xi(A)$$

(3.2.2) follows from (3.2.4) and (3.2.5) \square

3.3. Right Shift

For the right shift [1]-(2.4.14) the system (3.1.31) gets form

$$(3.3.1) \quad \frac{\partial b'^K}{\partial a^L} = \psi_{rT}^K(b') \lambda_{rL}^T(a)$$

Functions b'^K are solutions of the system (3.3.1) and according to [1]-(2.4.14) they depend on b^1, \dots, b^n which we can assume as constants. Thus solution of the system (3.3.1) depends on n arbitrary constants and therefore the system (3.3.1) is completely integrable. Condition of its integrability has the form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^R} \lambda_{rP}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rP}^T(a)}{\partial a^R} = \\ & = \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^P} \lambda_{rR}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rR}^T(a)}{\partial a^P} \end{aligned}$$

Using (3.3.1) we can write this condition in more simple form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') \lambda_{rR}^V(a) \lambda_{rP}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rP}^T(a)}{\partial a^R} = \\ & = \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') \lambda_{rP}^V(a) \lambda_{rR}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rR}^T(a)}{\partial a^P} \\ & \quad - \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{rV}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rT}^S(b') = \\ & = \psi_{rU}^L(b') \psi_{rT}^P(a) \psi_{rV}^R(a) \left(\frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} \right) \end{aligned}$$

Now we introduce **right structural constant of Lie algebra**

$$(3.3.2) \quad C_{rVT}^U = \psi_{rV}^R(a) \psi_{rT}^P(a) \left(\frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} \right)$$

Then we have

$$(3.3.3) \quad \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{rV}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rT}^S(b') = C_{rVT}^U \psi_{rU}^L(b')$$

If we differentiate this equation with respect to a^P we get

$$\frac{\partial C_{rVT}^U}{\partial a^P} \psi_{rU}^L(b') = 0$$

because $\psi_{rU}^L(b')$ does not depend on a . At the same time $\psi_{rU}^L(b')$ are line independent because $\det \|\psi_{rU}^L\| \neq 0$. Therefore

$$\frac{\partial C_{rVT}^U}{\partial a^P} = 0$$

and C_{rTV}^U are constants. We call them structural constants. from (3.3.2), it follows that

$$(3.3.4) \quad C_{rTV}^U \lambda_{rP}^T(a) \lambda_{rR}^V(a) = \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} - \frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P}$$

We call (3.3.4) Maurer equation.

Theorem 3.3.1. *Vector fields defined by differential operator*

$$(3.3.5) \quad X_{rV} = \psi_{rV}^S(a) \frac{\partial}{\partial a^S}$$

are line independent and their commutator is

$$(X_{rT}, X_{rV}) = C_{rTV}^U X_{rU}$$

PROOF. Line independence of vector fields follows from theorem 3.1.4. Then we see that according to (3.3.3)

$$\begin{aligned} (X_{rT}, X_{rV}) &= (X_{rT}\psi_{rV}^D - X_{rV}\psi_{rT}^D) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= \left(\psi_{rT}^P(a) \frac{\partial \psi_{rV}^D(a)}{\partial a^P} - \psi_{rV}^R(a) \frac{\partial \psi_{rT}^D(a)}{\partial a^R} \right) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= C_{rTV}^U \psi_{rU}^D(a) \frac{\partial}{\partial a^D} = C_{rTV}^U X_{rU} \end{aligned}$$

□

Let we have the homomorphism $f : G_1 \rightarrow G$ of the 1-parameter Lie group G_1 into the group G . Image of this group is the 1-parameter subgroup. If t is coordinate on the group G_1 we can write $a = f(t)$ and find out differential equation for this subgroup. We assume in case of right shift that $a = f(t_1)$, $b = f(t_2)$, $c = ab = f(t)$, $t = t_1 + t_2$. Then we have

$$\begin{aligned} \frac{dc^K}{dt} &= \frac{\partial c^K}{\partial b^L} \frac{db^L}{dt} = \psi_{rT}^K(c) \lambda_{rL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \frac{dt_2}{dt} \\ \frac{dc^K}{dt} &= \psi_{rT}^K(c) \lambda_{rL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \end{aligned}$$

Left part does not depend on t_2 , therefore right part does not depend on t_2 . We assume that

$$\lambda_{rL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} = \alpha^T$$

Thus we get system of differential equations

$$\frac{dc^K}{dt} = \psi_{rT}^K(c) \alpha^T$$

Because ψ_r is derivative of right shift at identity of group this equation means that 1-parameter group is determined by vector $\alpha^T \in T_e G$ and transfers this vector along 1-parameter group without change. We call this vector field **right invariant vector field**. We introduce vector product on T_e as

$$(3.3.6) \quad [\alpha, \beta]^T = C_{rRS}^T \alpha^R \beta^S$$

Space $T_e G$ equipped by such operation becomes Lie algebra \mathfrak{g}_r . We call it **right defined Lie algebra of Lie group**

Theorem 3.3.2. *Space of right invariant vector fields has finite dimension equal of dimension of Lie group. It is Lie algebra with product equal to commutator of vector fields and this algebra is isomorphic to Lie algebra \mathfrak{g}_r .*

PROOF. It follows from (3.3.5) and (3.3.6) because α^K and β^K are constants

$$\begin{aligned} (X_{rT}\alpha^T, X_{rV}\beta^V) &= (X_{rT}, X_{rV})\alpha^T\beta^V = \\ &= C_{rTV}^U X_{rU}\alpha^T\beta^V = [\alpha, \beta]^U X_{rU} \end{aligned}$$

□

3.4. Left Shift

For the left shift [1]-(2.4.12) the system (3.1.32) gets form

$$(3.4.1) \quad \frac{\partial b'^K}{\partial a^L} = \psi_{lT}^K(b') \lambda_{lL}^T(a)$$

Functions b'^K are solutions of system (3.4.1) and according to [1]-(2.4.12) they depend on b^1, \dots, b^n which we can assume as constants. Thus solution of system (3.4.1) depends on n arbitrary constants and therefore the system (3.4.1) is completely integrable. Condition of its integrability has the form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^R} \lambda_{lP}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lP}^T(a)}{\partial a^R} = \\ &= \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^P} \lambda_{lR}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lR}^T(a)}{\partial a^P} \end{aligned}$$

Using (3.4.1) we can write this condition in more simple form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') \lambda_{lP}^V(a) \lambda_{lP}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lP}^T(a)}{\partial a^R} = \\ &= \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') \lambda_{lP}^V(a) \lambda_{lR}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lR}^T(a)}{\partial a^P} \\ &\quad \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{lV}^S(b')}{\partial b'^S} \psi_{lT}^L(b') = \\ &= \psi_{lU}^L(b') \psi_{lT}^P(a) \psi_{lV}^R(a) \left(\frac{\partial \lambda_{lR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{lP}^U(a)}{\partial a^R} \right) \end{aligned}$$

Now we introduce **left structural constant of Lie algebra**

$$(3.4.2) \quad C_{lVT}^U = \psi_{lV}^R(a) \psi_{lT}^P(a) \left(\frac{\partial \lambda_{lR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{lP}^U(a)}{\partial a^R} \right)$$

Then we have

$$(3.4.3) \quad \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{lV}^S(b')}{\partial b'^S} \psi_{lT}^L(b') = C_{lVT}^U \psi_{lU}^L(b')$$

If we differentiate this equation with respect to a^P we get

$$\frac{\partial C_{lVT}^U}{\partial a^P} \psi_{lU}^L(b') = 0$$

because $\psi_{lU}^L(b')$ does not depend on a . At the same time $\psi_{lU}^L(b')$ are line independent because $\det \|\psi_{lU}^L\| \neq 0$. Therefore

$$\frac{\partial C_{lVT}^U}{\partial a^P} = 0$$

and C_{lTV}^U are constants. We call them structural constants. From (3.4.2), it follows that

$$(3.4.4) \quad C_{lTV}^U \lambda_{rP}^T(a) \lambda_{rR}^V(a) = \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} - \frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P}$$

We call (3.4.4) Maurer equation.

Theorem 3.4.1. *Vector fields defined by differential operator*

$$(3.4.5) \quad X_{IV} = \psi_{IV}^S(a) \frac{\partial}{\partial a^S}$$

are line independent and their commutator is

$$(X_{IT}, X_{IV}) = C_{ITV}^U X_{IU}$$

PROOF. Line independence of vector fields follows theorem 3.1.4. Then we see that according to (3.4.3)

$$\begin{aligned} (X_{IT}, X_{IV}) &= (X_{IT}\psi_{IV}^D - X_{IV}\psi_{IT}^D) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= \left(\psi_{IT}^P(a) \frac{\partial \psi_{IV}^D(a)}{\partial a^P} - \psi_{IV}^R(a) \frac{\partial \psi_{IT}^D(a)}{\partial a^R} \right) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= C_{ITV}^U \psi_{IU}^D(a) \frac{\partial}{\partial a^D} = C_{ITV}^U X_U \end{aligned}$$

□

Let we have the homomorphism $f : G_1 \rightarrow G$ of the 1-parameter Lie group G_1 into the group G . Image of this group is the 1-parameter subgroup. If t is coordinate on the group G_1 we can write $a = f(t)$ and find out differential equation for this subgroup. We assume in case of left shift that $a = f(t_1)$, $b = f(t_2)$, $c = ab = f(t)$, $t = t_1 + t_2$. Then we have

$$\begin{aligned} \frac{dc^K}{dt} &= \frac{\partial c^K}{\partial b^L} \frac{db^L}{dt} = \psi_{IT}^K(c) \lambda_{IT}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \frac{dt_2}{dt} \\ \frac{dc^K}{dt} &= \psi_{IT}^K(c) \lambda_{IT}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \end{aligned}$$

Left part does not depend on t_2 , therefore right part does not depend on t_2 . We assume that

$$\lambda_{IT}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} = \alpha^T$$

Thus we get system of differential equations

$$\frac{dc^K}{dt} = \psi_{IT}^K(c) \alpha^T$$

Because ψ_{IT} is derivative of right shift at identity of group this equation means that 1-parameter group is determined by vector $\alpha^T \in T_e G$ and transfers this vector along 1-parameter group without change. We call this vector field **left invariant vector field**. We introduce vector product on T_e as

$$(3.4.6) \quad [\alpha, \beta]^T = C_{ITS}^T \alpha^R \beta^S$$

Space $T_e G$ equipped by such operation becomes Lie algebra \mathfrak{g}_l . We call it **left defined Lie algebra of Lie group**

Theorem 3.4.2. *Space of right invariant vector fields has finite dimension equal of dimension of Lie group. It is Lie algebra with product equal to commutator of vector fields and this algebra is isomorphic to Lie algebra \mathfrak{g}_l .*

PROOF. It follows from (3.4.5) and (3.4.6) because α^K and β^K are constants

$$\begin{aligned} (X_{lT}\alpha^T, X_{lV}\beta^V) &= (X_{lT}, X_{lV})\alpha^T\beta^V = \\ &= C_{lTV}^U X_{lU}\alpha^T\beta^V = [\alpha, \beta]^U X_{lU} \end{aligned}$$

□

3.5. Relation between Algebras Lie \mathfrak{g}_l and \mathfrak{g}_r

We defined two different algebras Lie on space $T_e G$. Our goal now is to define relation between these algebras. We start to solve this problem from analysis of Taylor expansion of group operation.

Theorem 3.5.1. *Up to second order of infinitesimal, structure of operation on group Lie*

$$(3.5.1) \quad \varphi^K(a, b) = a^K + b^K - e^K + I_{LM}^K(a^M - e^M)(b^L - e^L)$$

where we introduce **infinitesimal generators of group Lie**

$$I_{LM}^K = I_{lLM}^K = I_{rML}^K$$

PROOF. We can find Taylor expansion of product by both arguments. However like in sections 3.3 and 3.4 we can assume one argument as parameter and find Taylor expansion by another argument. In this case its coefficients will depend on former argument.

Thus according to (3.1.2) and (3.1.15), product in vicinity of $a \in G$ has Taylor expansion relative b

$$(3.5.2) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= a^K + \psi_r^K(a)(b^L - e^L) + o(b^L - e^L) \\ ab &= a + \psi_r(a)(b - e) + o(b - e) \end{aligned}$$

where coefficients of expansion depend on a . At the same time $\psi_r(a)$ also has Taylor expansion in vicinity of e

$$(3.5.3) \quad \psi_r^K(a) = \delta_L^K + I_{rLM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

If we substitute (3.5.3) into (3.5.2) we get expansion

$$(3.5.4) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= a^K + (\delta_L^K + I_{rLM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M))(b^L - e^L) + o(b^L - e^L) \\ \varphi^K(a, b) &= a^K + b^K - e^K + I_{rLM}^K(a^M - e^M)(b^L - e^L) + o(a^M - e^M, b^L - e^L) \end{aligned}$$

According (3.1.3) and (3.1.16), product in vicinity of $b \in G$ has Taylor expansion relative a

$$(3.5.5) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= b^K + \psi_l^K(b)(a^L - e^L) + o(a^L - e^L) \\ ab &= b + \psi_l(b)(a - e) + o(a - e) \end{aligned}$$

where coefficients of expansion depend on b . At the same time $\psi_l(b)$ also has Taylor expansion in vicinity of e

$$(3.5.6) \quad \psi_l^K(b) = \delta_L^K + I_{lLM}^K(b^M - e^M) + o(b^M - e^M)$$

If we substitute (3.5.6) into (3.5.5) we get expansion

$$(3.5.7) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= b^K + (\delta_L^K + I_{lLM}^K(b^M - e^M) + o(b^M - e^M))(a^L - e^L) + o(a^L - e^L) \\ \varphi^K(a, b) &= b^K + a^K - e^K + I_{lLM}^K(b^M - e^M)(a^L - e^L) + o(a^M - e^M, b^L - e^L) \end{aligned}$$

(3.5.4) and (3.5.7) are Tailor expansions of the same function and they should be coincide. Comparing them we see that $I_{lLM}^K = I_{rML}^K$. Then group Lie operation has Tailor expansion (3.5.1) \square

Theorem 3.5.2. *Up to second order of infinitesimal, structure of operation on group Lie*

$$(3.5.8) \quad \psi_{rL}^K(a) = \delta_L^K + I_{ML}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

$$(3.5.9) \quad \psi_{lL}^K(a) = \delta_L^K + I_{LM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

$$(3.5.10) \quad \lambda_{rL}^K(a) = \delta_L^K - I_{LM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

$$(3.5.11) \quad \lambda_{lL}^K(a) = \delta_L^K - I_{ML}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

PROOF. (3.5.8) and (3.5.9) follow from differentiating of (3.5.1) with respect to a or b and definitions (3.1.15) and (3.1.16).

Now we assume that $\lambda_{rL}^K(a)$ has Tailor expansion

$$(3.5.12) \quad \lambda_{rL}^K(a) = \delta_L^K + J_{LM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

Then substituting (3.5.12) and (3.5.8) into equation

$$\lambda_{rL}^K(a)\psi_{rM}^L(a) = \delta_M^K$$

we get up to order 1

$$\begin{aligned} (\delta_L^K + I_{NL}^K(a^N - e^N) + o(a^N - e^N))(\delta_M^L + J_{MP}^L(a^P - e^P) + o(a^P - e^P)) &= \delta_M^K \\ \delta_M^K + (J_{MN}^K + I_{NM}^K)(a^N - e^N) + o(a^P - e^P) &= \delta_M^K \end{aligned}$$

Therefore $J_{MN}^K + I_{NM}^K = 0$ and substituting J_{MN}^K into (3.5.12) we get (3.5.10).

The same way we can prove (3.5.11). \square

The next theorem follows immediately from theorem 3.5.2.

Theorem 3.5.3.

$$(3.5.13) \quad \left. \frac{\partial \psi_{rL}^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = I_{ML}^K$$

$$(3.5.14) \quad \left. \frac{\partial \psi_{lL}^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = I_{LM}^K$$

$$(3.5.15) \quad \left. \frac{\partial \lambda_{rL}^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = -I_{LM}^K$$

$$(3.5.16) \quad \left. \frac{\partial \lambda_{lL}^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = -I_{ML}^K$$

On the base of theorem 3.5.3 we can get more detailed information about left and right group algebras Lie. Because definition (3.3.2) does not depend on a we can estimate it when $a = e$. Using (3.1.17) and (3.5.16) we get

$$C_{lTV}^U = \delta_T^P \delta_V^R (-I_{RP}^U + I_{PR}^U) = I_{TV}^U - I_{VT}^U$$

Using (3.1.18) and (3.5.15) we get

$$C_{rTV}^U = \delta_T^P \delta_V^R (-I_{PR}^U + I_{RP}^U) = I_{VT}^U - I_{TV}^U$$

Therefore

$$C_{rTV}^U = -C_{lTV}^U$$

and algebras \mathfrak{g}_l and \mathfrak{g}_r are anti isomorphic. Usualy we asume that \mathfrak{g}_l is Lie algebra of Lie group and use notation

$$C_{TV}^U = C_{lTV}^U$$

Let $\mathfrak{g} = T_e G$ be **Lie algebra of Lie group** G with an operation

$$\alpha_3^L = C_{MN}^L \alpha_1^M \alpha_2^N \quad \alpha_3 = C(\alpha_1, \alpha_2)$$

CHAPTER 4

Representation of Lie Group

4.1. Representation of Lie Group

We will explore a representation of a Lie group in a continuous vector space.^{4.1}
Let

$$\begin{aligned}\bar{v}' &= \bar{f}(a)(\bar{v}) \\ \bar{v}'' &= \bar{f}(b)(\bar{v}') = \bar{f}(c)(\bar{v})\end{aligned}$$

Let \bar{e} be the basis of vector space M . Then expansion of vector $\bar{f}(a)(\bar{v})$ has form

$$\bar{f}(a)(\bar{v}) = f^i(a)(\bar{v})\bar{e}_i$$

Theorem 4.1.1. Basis vector of representation of Lie group *is defined by equation*

$$(4.1.1) \quad \bar{\xi}(\bar{v}') = \bar{\beta}(b, \bar{v}') \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial b} \Big|_{b=e}$$

$$(4.1.2) \quad \xi_L^a(\bar{v}') = \beta_p^a(b, \bar{v}') \frac{\partial f^p(b)(\bar{v}')}{\partial b^L} \Big|_{b=e}$$

where we introduced operator $\bar{\beta}(a, \bar{v})$ such that

$$\bar{\beta} \frac{\partial \bar{f}(a)(\bar{v})}{\partial \bar{v}} = 1 \quad \beta_p^a \frac{\partial f^p(a)(\bar{v})}{\partial v^b} = \delta_b^a$$

Covariant representation of Lie group G in set M

$$(4.1.3) \quad c = ba$$

satisfies to the system of differential equations

$$(4.1.4) \quad \frac{\partial \bar{f}(a)(\bar{v})}{\partial a} = \bar{\xi}(\bar{v}') \lambda_r(a) \quad \frac{\partial f^i(a)(\bar{v})}{\partial a^M} = \xi_L^i(\bar{v}') \lambda_r^L(a)$$

Contravariant representation of Lie group G in set M

$$(4.1.5) \quad c = ab$$

satisfies to the system of differential equations

$$(4.1.6) \quad \frac{\partial \bar{f}(a)(\bar{v})}{\partial a} = \bar{\xi}(\bar{v}') \lambda_l(a) \quad \frac{\partial f^i(a)(\bar{v})}{\partial a^M} = \xi_L^i(\bar{v}') \lambda_l^L(a)$$

PROOF. We express b through a and c and differentiate the equation^{4.2}

$$\bar{f}(c)(\bar{v}) = \bar{f}(b)(\bar{f}(a)(\bar{v}))$$

^{4.1}In the section [1]-2.4, we reviewed the general concept of representation of group.

^{4.2}See equations [1]-(2.4.1) and [1]-(2.4.5).

with respect to a

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial \bar{v}'} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{v}'}{\partial a} &= -\bar{\beta}(b, \bar{v}') \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} \end{aligned}$$

Left part does not depend on b , so and right part does not depend on b . We define right part when $b = e$.

If the representation is covariant, then, from equations (4.1.3), (3.1.38), when $ca^{-1} = e$, it follows that

$$(4.1.8) \quad \left. \frac{\partial b}{\partial a} \right|_{ca^{-1}=e} = \left. \frac{\partial ca^{-1}}{\partial a} \right|_{ca^{-1}=e} = -\psi_r(ca^{-1})|_{ca^{-1}=e} \psi_l^{-1}(a) = \lambda_l(a)$$

Equation (4.1.4) follows from equations (4.1.1), (4.1.8), (4.1.7).

If the representation is contravariant, then, from equations (4.1.5), (3.1.37), when $a^{-1}c = e$, it follows that

$$(4.1.9) \quad \left. \frac{\partial b}{\partial a} \right|_{a^{-1}c=e} = \left. \frac{\partial a^{-1}c}{\partial a} \right|_{a^{-1}c=e} = -\psi_l(a^{-1}c)|_{a^{-1}c=e} \psi_r^{-1}(a) = \lambda_r(a)$$

Equation (4.1.4) follows from equations (4.1.1), (4.1.9), (4.1.7). \square

Theorem 4.1.2. ξ is operator mapping algebra \mathfrak{g} to algebra of left-invariant vector fields on M . Element $\alpha \in \mathfrak{g}$ creates left-invariant vector field

$$B^a = \xi_M^a(u')\alpha^M$$

on manifold M .

PROOF. ξ maps algebra Lie \mathfrak{g} into tangent plane of manifold. If $\alpha \in \mathfrak{g}$ depends on parametr t , we can write differential equation

$$\frac{df}{dt} = \xi(u')\lambda_l(a)\lambda_r(a)\frac{da}{dt}$$

If a is element of 1-parameter subgroup created by element $\alpha \in \mathfrak{g}$, then it satisfies equation Therefore using (3.1.19) we get

$$\frac{du'}{dt} = \xi(u')\lambda_r(a)\psi_r(a)\alpha = \xi(u')\alpha$$

\square

4.2. Algebraic Properties of Representation

Theorem 4.2.1. Let \bar{f}_1 be the representation of group G in vector space V_1 . Let \bar{f}_2 be the representation of group G in vector space V_2 . Let geometric object \bar{v} is tensor product of geometric objects $\bar{v}_1 \in V_1$ and $\bar{v}_2 \in V_2$

$$(4.2.1) \quad \bar{f}(a)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) = \bar{f}_1(a)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(a)(\bar{v}_2)$$

If representations \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are covariant, then mapping \bar{f} is covariant representation of group G in vector space $V = V_1 \otimes V_2$. If representations \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are contravariant, then mapping \bar{f} is contravariant representation of group G in vector space $V = V_1 \otimes V_2$. The representation \bar{f} is called **tensor product of representations** and

$$(4.2.2) \quad \bar{\xi}(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) = \bar{\xi}_1(\bar{v}_1) \otimes \bar{v}_2 + \bar{v}_1 \otimes \bar{\xi}_2(\bar{v}_2)$$

PROOF. First of all let us show that we get new representation. If we apply transformations for $a \in G$ and $b \in G$ consequently then we have

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \bar{f}(a)(\bar{f}(b)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2)) &= \bar{f}(a)(\bar{f}_1(b)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(b)(\bar{v}_2)) \\ &= \bar{f}_1(a)(\bar{f}_1(b)(\bar{v}_1)) \otimes \bar{f}_2(a)(\bar{f}_2(b)(\bar{v}_2)) \end{aligned}$$

Such if \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are covariant presentations then from (4.2.3) it follow, that

$$\begin{aligned} \bar{f}(a)(\bar{f}(b)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2)) &= \bar{f}_1(ab)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(ab)(\bar{v}_2) \\ &= \bar{f}(ab)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) \end{aligned}$$

Therefore \bar{f} is also covariant representation. If \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are contravariant presentations then from (4.2.3) it follow, that

$$\begin{aligned} \bar{f}(a)(\bar{f}(b)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2)) &= \bar{f}_1(ba)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(ba)(\bar{v}_2) \\ &= \bar{f}(ba)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) \end{aligned}$$

Therefore \bar{f} is also contravariant representation.

Differentiating equation (4.2.1) with respect to a we get

$$(4.2.4) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial a} \otimes \bar{f}_2 + \bar{f}_1 \otimes \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial a}$$

We get (4.2.2) from (4.2.4) by definition when $a = e$. \square

Why this important that \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are of the same type? We see from (4.2.3) that if \bar{f}_1 is covariant representation and \bar{f}_2 is contravariant representation we cannot tell what should be in the right side of this equation: ab or ba . We still have family of transformation depending on $a \in G$. This dependence will be smooth and we can write down its derivative. However as we can see product of transformations from this family in general does not belong to this family.

Theorem 4.2.2. *Let vector space V be direct sum of vector spaces V_1 and V_2*

$$V = V_1 \oplus V_2$$

Let \bar{f}_1 be the representation of group G in vector space V_1 . Let \bar{f}_2 be the representation of group G in vector space V_2 . Let geometric object \bar{v} is direct sum of geometric objects $\bar{v}_1 \in V_1$ and $\bar{v}_2 \in V_2$

$$(4.2.5) \quad \bar{f}(a)(\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) = \bar{f}_1(a)(\bar{v}_1) \oplus \bar{f}_2(a)(\bar{v}_2)$$

*If representations \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are covariant, then mapping \bar{f} is covariant representation of group G in vector space $V = V_1 \oplus V_2$. If representations \bar{f}_1 and \bar{f}_2 are contravariant, then mapping \bar{f} is contravariant representation of group G in vector space $V = V_1 \oplus V_2$. The representation \bar{f} is called **direct sum of representations** and*

$$\bar{\xi}(\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1(\bar{v}_1) & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_2(\bar{v}_2) \end{pmatrix}$$

PROOF. We can just get derivative of mapping (4.2.5). \square

4.3. Linear Representation of Lie Group

Theorem 4.3.1. *In case of linear representation*

$$(4.3.1) \quad v' = \bar{f}(a)(\bar{v}) \quad f^i(a)(\bar{v}) = f_j^i(a)v^j$$

basis vector of representation has form

$$(4.3.2) \quad \bar{\xi}(\bar{v}') = Iv' \quad \xi_L^i(\bar{v}') = I_{jL}^i v'^j$$

where we introduce infinitesimal generators of representation

$$(4.3.3) \quad I_{jM}^i = \left. \frac{\partial f_j^i}{\partial a^M} \right|_{a=e} \quad I = \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a=e}$$

PROOF. If we substitute

$$f^i(a)(\bar{v}) = f_j^i(a)v^j$$

into (4.1.2), we get

$$\xi_L^i(\bar{v}') = f^{-1k}_i(b) \left. \frac{\partial f_j^k(b)}{\partial b^L} v'^j \right|_{b=e} = I_{jL}^i v'^j$$

□

Theorem 4.3.2. *Linear covariant representation satisfies to differential equations*

$$(4.3.4) \quad \frac{\partial v'^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i \lambda_r^L(a) v'^j$$

$$(4.3.5) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i f_k^j \lambda_r^L(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = If \lambda_r(a)$$

PROOF. (4.3.4) is corollary of (4.1.4) and (4.3.2). If we substitute (4.3.1) into (4.3.4), we get

$$\frac{\partial f_c^a}{\partial a^M} u^c = I_{bL}^a \lambda_l^L(a) f_c^b u^c$$

(4.3.5) follows from this. □

Theorem 4.3.3. *Linear contravariant representation satisfies to differential equations*

$$(4.3.6) \quad \frac{\partial u'^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i u'^j \lambda_l^L(a)$$

$$(4.3.7) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i f_k^j \lambda_l^L(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = If \lambda_l(a)$$

PROOF. (4.3.6) is corollary of equations (4.1.6) and (4.3.2). If we substitute (4.3.1) into (4.3.6), we get

$$\frac{\partial f_c^a}{\partial a^M} u^c = I_{bL}^a \lambda_r^L(a) f_c^b u^c$$

(4.3.7) follows from this. □

4.4. Algebraic Properties of Linear Representation

Theorem 4.4.1. *Let representations f_1 and f_2 are either both covariant or both contravariant. Let representation f be their tensor product. Than*

$$(4.4.1) \quad I = I_1 \otimes E_2 + E_1 \otimes I_2$$

PROOF. Differentiating equation

$$f(a) = f_1(a) \otimes f_2(a)$$

with respect to a we get

$$(4.4.2) \quad \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f_1}{\partial a} \otimes f_2 + f_1 \otimes \frac{\partial f_2}{\partial a}$$

We get (4.4.1) from (4.4.2) by definition when $a = e$. \square

Theorem 4.4.2. *If f is linear representation of group G in vector space M , then mapping $h(a) = f(a^{-1})$ is also linear representation of group G in vector space M*

$$(4.4.3) \quad I_{h \cdot jL} = -I_{f \cdot jL}$$

If f is linear covariant representation, then h is contravariant representation

$$(4.4.4) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{f \cdot jL} f_k^j \lambda_{rM}^L(a) \quad \frac{\partial h_k^i}{\partial a^M} = -I_{f \cdot jL} h_k^j \lambda_{lM}^L(a)$$

If f is linear contravariant representation, then h is covariant representation

$$(4.4.5) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{f \cdot jL} f_k^j \lambda_{lM}^L(a) \quad \frac{\partial h_k^i}{\partial a^M} = -I_{f \cdot jL} h_k^j \lambda_{rM}^L(a)$$

PROOF. From the theorem [1]-2.4.10. it follows that h is covariant representation when f is contravariant. Similar way we prove the statement that h is contravariant representation when f is covariant. Since the transformation inversed to linear also is linear, than the representation h is also linear.

To prove the theorem we need to find infinitesimal generators of the representation h . According to the equation (4.3.3)

$$(4.4.6) \quad I_{h \cdot jM} = \left. \frac{\partial h_j^i(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = \left. \frac{\partial f_j^i(a^{-1})}{\partial a^M} \right|_{a=e} = \left. \frac{\partial f_j^i(a^{-1})}{\partial a^{-1.N}} \frac{\partial a^{-1.N}}{\partial a^M} \right|_{a=e}$$

It is evident that

$$(4.4.7) \quad \left. \frac{\partial f_j^i(a^{-1})}{\partial a^{-1.N}} \right|_{a=e} = \left. \frac{\partial f_j^i(a)}{\partial a^N} \right|_{a=e} = I_{f \cdot jN}$$

From the equation (3.1.34), it follows that

$$(4.4.8) \quad = \left. \frac{\partial a^{-1.N}}{\partial a^M} \right|_{a=e} = -\psi_{l \cdot K}^N(a^{-1}) \lambda_{r \cdot M}^K(a) \Big|_{a=e} = -\delta_M^N$$

The equation (4.4.3) follows from equations (4.4.6), (4.4.7), (4.4.8). \square

Theorem 4.4.3. *Let vector space V be direct sum of vector spaces V_1 and V_2*

$$V = V_1 \oplus V_2$$

Let representations of group G in vector spaces V_1 and V_2 are either both covariant or both contravariant. Than we can define representation of group G in vector space V and

$$I_P = \begin{pmatrix} I_{1b_1P}^{a_1} & 0 \\ 0 & I_{2b_2P}^{a_2} \end{pmatrix}$$

PROOF. We can just get derivative of mapping

$$f(a)(v_1 \oplus v_2) = f_{1b_1}^{a_1}(a)(v_1^{b_1} e_{a_1}) + f_{2b_2}^{a_2}(a)(v_2^{b_2} e_{a_2})$$

□

CHAPTER 5

Differential Properties of Geometric Object

5.1. Covariant Derivative

We want to study how coordinates of the geometric object (4.3.1) change when we move along manifold. We assume that $GL(n)$ is the main group of transformations. Local basis has transformation

$$a_l^k = \delta_l^k + \Gamma_{lp}^k dx^p$$

Therefore

$$v'^\alpha = v^\beta (\delta_\beta^\alpha + I_{\beta \cdot k}^\alpha (\delta_l^k - \Gamma_{lp}^k dx^p - \delta_l^k))$$

If we introduce connection

$$\Gamma_{\beta p}^\alpha = I_{\beta \cdot k}^\alpha \Gamma_{lp}^k$$

then we get

$$Dv^\alpha = v'^\alpha - v^\alpha = -\Gamma_{\beta p}^\alpha v^\beta dx^p$$

This allows us to introduce covariant derivative

$$v_{;k}^\alpha = v_{,k}^\alpha + \Gamma_{\beta p}^\alpha v^\beta$$

Consider commutator of two derivatives

$$\begin{aligned} v_{;kl}^\alpha - v_{;lk}^\alpha &= v_{;k,l}^\alpha + \Gamma_{\beta l}^\alpha v_{;k}^\beta - \Gamma_{kl}^p v_{;p}^\alpha - v_{;l,k}^\alpha - \Gamma_{\beta k}^\alpha v_{;l}^\beta + \Gamma_{lk}^p v_{;p}^\alpha \\ &= \underline{v_{;kl}^\alpha}_1 + \Gamma_{\beta k,l}^\alpha v^\beta + \underline{\Gamma_{\beta k}^\alpha v_{;l}^\beta}_3 + \Gamma_{\beta l}^\alpha (\underline{v_{;k}^\beta}_4 + \Gamma_{\gamma k}^\beta v^\gamma) - \underline{\Gamma_{kl}^p v_{;p}^\alpha}_{2:T} \\ &\quad - \underline{v_{;lk}^\alpha}_1 - \Gamma_{\beta l,k}^\alpha v^\beta - \underline{\Gamma_{\beta l}^\alpha v_{;k}^\beta}_4 - \Gamma_{\beta k}^\alpha (\underline{v_{;l}^\beta}_3 + \Gamma_{\gamma l}^\beta v^\gamma) + \underline{\Gamma_{lk}^p v_{;p}^\alpha}_{2:T} \\ &= (\Gamma_{\beta k,l}^\alpha - \Gamma_{\beta l,k}^\alpha + \Gamma_{\gamma l}^\alpha \Gamma_{\beta k}^\gamma - \Gamma_{\gamma k}^\alpha \Gamma_{\beta l}^\gamma) v^\beta + T_{kl}^p v_{;p}^\alpha \end{aligned}$$

(5.1.1) $v_{;kl}^\alpha - v_{;lk}^\alpha = R_{\beta lk}^\alpha v^\beta - T_{lk}^p v_{;p}^\alpha$

5.2. Lie Derivative

Vector field ξ^k on manifold generates infinitesimal transformation

$$(5.2.1) \quad x'^k = x^k + \epsilon \xi^k$$

which leads to **Lie derivative**. Lie derivative tells us how the geometric object changes when we move along the vector field.

Consider the Lie derivative for geometric object (4.3.1). In this case we have transformation

$$a_l^k = \delta_l^k + \epsilon a_{,l}^k$$

According to (4.3.2), the geometric object (4.3.1) has Lie derivative

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_a v^\alpha &= \frac{v^\alpha(x') - v'^\alpha(x')}{\epsilon} = \frac{(v^\alpha + v_{;p}^\alpha \epsilon a^p) - f_\beta^\alpha(a) v^\beta}{\epsilon} \\
 &= \frac{v^\alpha + v_{;p}^\alpha \epsilon a^p - (\delta_\beta^\alpha + I_{\beta \cdot k}^\alpha (a_l^k - \delta_l^k)) v^\beta}{\epsilon} \\
 &= \frac{v^\alpha + v_{;p}^\alpha \epsilon a^p - v^\alpha - I_{\beta \cdot k}^\alpha (\delta_l^k + \epsilon a_{;l}^k - \delta_l^k) v^\beta}{\epsilon} = \\
 &= v_{;p}^\alpha a^p - I_{\beta \cdot k}^\alpha a_{;l}^k v^\beta
 \end{aligned}$$

We can express this derivative through covariant derivative

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_a v^\alpha &= (v_{;p}^\alpha - I_{\beta \cdot k}^\alpha \Gamma_{lp}^k v^\beta - \Gamma_p^\alpha) a^p - I_{\beta \cdot k}^\alpha (a_{;l}^k - \Gamma_{pl}^k a^p) v^\beta = \\
 &= v_{;p}^\alpha a^p - I_{\beta \cdot k}^\alpha a_{;l}^k v^\beta + I_{\beta \cdot k}^\alpha S_{pl}^k a^p v^\beta
 \end{aligned}$$

CHAPTER 6

References

- [1] Aleks Kleyn, Representation of \mathfrak{F} -Algebra,
eprint [arXiv:0912.3315](#) (2009)
- [2] Eisenhart, Continuous Groups of Transformations, Dover Publications,
New York, 1961

CHAPTER 7

Index

basis vector of representation of Lie group
27

complete system of linear partial
differential equations 10

completely integrable system 7

direct sum of representations 29

essential parameters in a set of functions 11

infinitesimal generator 30

infinitesimal generators of group Lie 24

Jacobian complete system of differential
equations 10

left defined Lie algebra of Lie group 23

left invariant vector field 23

left structural constant of Lie algebra 22

Lie derivative 33

Lie group basic operators 16

right defined Lie algebra of Lie group 21

right invariant vector field 21

right structural constant of Lie algebra 20

tensor product of representations 28

CHAPTER 8

Special Symbols and Notations

- $A_L^K(a, b)$ derivative of left shift **15**
 $A_L(a, b)$ derivative of left shift in 1-
 parameter Lie group **18**
 $A_r^K(a, b)$ **15**
 $A_r^K(a, b)$ **15**
 $A_r(a, b)$ derivative of right shift in 1-
 parameter Lie group **18**
- C_{lVT}^U left structural constant of Lie
 algebra **22**
 C_{rVT}^U right structural constant of Lie
 algebra **20**
- $\overline{\xi}(\overline{v}')$ basis vector of representation of Lie
 group **27**
 $\xi_L^a(\overline{v}')$ coordinates of basis vector of
 representation of Lie group **27**
- \mathfrak{g} algebra Lie of group Lie **26**
 \mathfrak{g}_l left defined algebra Lie of group Lie **23**
 \mathfrak{g}_r right defined algebra Lie of group Lie
21
- I_j^i infinitesimal generator of
 representation **30**
 I_{LM}^K Lie group infinitesimal generators **24**
- $T_a G$ tangent plane to group G **16**
- $\lambda_l(a)$ inverse operator to operator ψ_l **16**
 $\lambda_r(a)$ inverse operator to operator ψ_r **16**
- $\psi_l^L(b)$ left basic operator of group Lie **16**
 $\psi_l(b)$ left basic operator of Lie
 1-parameter group **19**
 $\psi_r^L(a)$ right basic operator of group Lie
16
 $\psi_r(a)$ right basic operator of Lie
 1-parameter group **19**
- $\varphi^L(a_1, a_2)$ Lie group composition law **15**

Дифференциальные свойства геометрического объекта

Александр Клейн

E-mail address: Aleks_Kleyn@MailAPS.org

URL: <http://sites.google.com/site/alekskleyn/>

URL: http://arxiv.org/a/kleyn_a_1

URL: <http://AleksKleyn.blogspot.com/>

Аннотация. В книге рассмотрены дифференциальные уравнения для ковариантного и контравариантного представлений группы Ли в векторном пространстве. При переходе к касательному расслоению дифференцируемого многообразия мы получаем теорию параллельного переноса геометрического объекта.

Оглавление

Глава 1. Введение	5
1.1. Об этой книге	5
1.2. Соглашения	5
Глава 2. Дифференциальные уравнения	7
2.1. Вполне интегрируемые системы	7
2.2. Линейный дифференциальный оператор	9
2.3. Полная система линейных дифференциальных уравнений в част- ных производных	10
2.4. Существенные параметры семейства функций	11
Глава 3. Группа Ли	15
3.1. Операция на группе Ли	15
3.2. 1-параметрическая группа	18
3.3. Правый сдвиг	20
3.4. Левый сдвиг	22
3.5. Отношение между алгебрами Ли \mathfrak{g}_l и \mathfrak{g}_r	24
Глава 4. Представление группы Ли	27
4.1. Представление группы Ли	27
4.2. Алгебраические свойства представления	29
4.3. Линейное представление группы Ли	30
4.4. Алгебраические свойства линейного представления	31
Глава 5. Дифференциальные свойства геометрического объекта	33
5.1. Ковариантная производная	33
5.2. Производная Ли	33
Глава 6. Список литературы	35
Глава 7. Предметный указатель	36
Глава 8. Специальные символы и обозначения	37

Введение

1.1. Об этой книге

Эта книга основана на дипломном проекте, написанном мною в одесском университете. Мне очень повезло, что мой преподаватель Гаврильченко Михаил Леонидович прочёл курс лекций "Группы и алгебры Ли". Эти лекции были основаны на книге [2]. Впоследствии я записал уравнения группы Ли для конкретного случая представления группы GL в векторном пространстве геометрических объектов.

Если мы рассмотрим касательное расслоение на дифференцируемом многообразии, то движение из слоя в слой порождает непрерывное семейство преобразований. Комбинируя дифференциальные уравнения этого семейства преобразований и дифференциальные уравнения геометрического объекта, мы получим уравнения параллельного переноса геометрического объекта.

Впоследствии группа GL была заменена на произвольную группу Ли. Именно в таком виде эта теория была включена в книгу. Соответственно этому главы книги имеют следующее содержание. Представление группы Ли тесно связано с теорией дифференциальных уравнений. В главе 2 дано краткое изложение теории дифференциальных уравнений, посвящённое вполне интегрируемым системам дифференциальных уравнений. В главе 3 я записываю дифференциальные уравнения для группы Ли. Дифференциальные уравнения представления группы Ли записаны в главе 4.

1.2. Соглашения

- (1) Без сомнения, у читателя моих статей могут быть вопросы, замечания, возражения. Я буду признателен любому отзыву.

Дифференциальные уравнения

2.1. Вполне интегрируемые системы

Пусть ^{2.1} нам дана система nm дифференциальных уравнений в частных производных

$$(2.1.1) \quad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} = \psi_i^\alpha(\theta^1, \dots, \theta^m, x^1, \dots, x^n) = \psi_i^\alpha(\theta, x)$$

$$1 \leq \alpha \leq m \quad 1 \leq i \leq n \quad \theta^\alpha = \theta^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

Эта система разрешена относительно всех частных производных и эквивалентна системе уравнений в полных дифференциалах

$$d\theta^\alpha = \psi_i^\alpha(\theta, x) dx^i$$

Чтобы найти условия интегрируемости, мы дифференцируем (2.1.1) по x^j .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \frac{\partial \theta^\sigma}{\partial x^j} = \\ &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_j^\sigma \\ \frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} &= \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_i^\sigma \end{aligned}$$

Так как вторая производная непрерывной функции не зависит от порядка дифференцирования, мы ожидаем, что

$$(2.1.2) \quad \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_j^\sigma = \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \theta^\sigma} \psi_i^\sigma$$

Определение 2.1.1. Мы называем систему дифференциальных уравнений (2.1.1) **вполне интегрируемой системой**, если условие (2.1.2) удовлетворено тождественно. \square

Решение вполне интегрируемой системы (2.1.1) можно разложить в ряд Тейлора

$$(2.1.3) \quad \theta^\alpha = C^\alpha + \left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} \right)_{x=x_0} (x^i - x_0^i) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \right)_{x=x_0} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \dots$$

Здесь C^α ($1 \leq \alpha \leq m$) - константы,

$$\left(\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} \right)_{x=x_0} = \psi_i^\alpha(C^1, \dots, C^m, x_0^1, \dots, x_0^n)$$

^{2.1}Эта глава написана под влиянием [2]

Мы получим остальные коэффициенты дифференцированием правой части (2.1.1) и подстановкой C^α и x_0^i . Мы говорим о решении, когда ряд (2.1.3) сходится. Согласно теореме Коши и Ковалевской это справедливо, если ψ_i^α аналитичны по всем аргументам.

В окрестности точки (x_0^1, \dots, x_0^n) , для которой ряд (2.1.3) сходится, мы имеем решение

$$(2.1.4) \quad \theta^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, \dots, x^n, C^1, \dots, C^m)$$

определённое m константами.

Возможно, что условие (2.1.2) не удовлетворенно тождественно. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1.1) не является вполне интегрируемой и уравнение (2.1.2) накладывает ограничения на функции θ^α . Следовательно, функции θ^α удовлетворяют (2.1.1) и (2.1.2). Предположим, что (2.1.2) накладывает S_1 ограничений. Мы дифференцируем их по x^k и получим новые S_2 уравнения. Если эти уравнения не удовлетворены тождественно, мы можем повторить этот процесс снова.

Так как мы не можем иметь более чем m ограничений, эта цепь обрывается. Если система дифференциальных уравнений (2.1.1) имеет решение, это решение удовлетворяет всем ограничениям, в противном случае эти ограничения противоречивы.

Теорема 2.1.2. *Необходимое и достаточное условие существования решения системы дифференциальных уравнений (2.1.1) - это существование такого N , что S_1, \dots, S_N алгебраически совместимы, и S_{N+1} является их следствием. Если мы получили p ограничений, то общее решение зависит от $m - p$ произвольных констант.*

Доказательство. Мы доказали, что это условие необходимо. Теперь мы покажем, что это условие достаточно. Предположим, что мы получили p ограничений

$$(2.1.5) \quad \Phi^\gamma(\theta, x) = 0 \quad \gamma = 1, \dots, p$$

Так как

$$Rg \left\| \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial \theta^\alpha} \right\| = p$$

мы можем выразить p переменных θ^α через остальные, пользуясь (2.1.5). Если мы правильно перенумеруем переменные, мы получим

$$(2.1.6) \quad \theta^\nu = \phi^\nu(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x) \quad \nu = 1, \dots, p$$

Подставим (2.1.6) в (2.1.1) и получим

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} = \bar{\psi}_i^\alpha(\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x^1, \dots, x^n) \quad \alpha = p+1, \dots, m$$

Условие (2.1.2) удовлетворенно. Система дифференциальных уравнений (2.1.7) вполне интегрируема и имеет решение, зависящее от $m - p$ произвольных констант. Первые p уравнения удовлетворены в силу (2.1.6), когда $\theta^{p+1}, \dots, \theta^m, x$ являются решениями (2.1.7). \square

2.2. Линейный дифференциальный оператор

Пусть даны r дифференциальных операторов

$$(2.2.1) \quad X_a f = \xi_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Оператор (2.2.1) линеен

$$X_a(f + g) = X_a f + X_a g$$

$$X_a(\lambda f) = \lambda X_a f \quad \lambda = \text{const}$$

Произведение этих операторов имеет вид

$$\begin{aligned} X_a X_b f &= X_a(X_b f) = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\xi_b^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \xi_a^i \frac{\partial \xi_b^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \xi_a^i \xi_b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^j} X_a \xi_b^j + \xi_a^i \xi_b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned}$$

Мы использовали (2.2.1) на последнем шаге. Это не оператор вида (2.2.1). Однако так как второе слагаемое симметрично относительно a и b , мы можем определить коммутатор

$$(2.2.2) \quad (X_a, X_b)f = X_a X_b f - X_b X_a f = (X_a \xi_b^j - X_b \xi_a^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Это линейная операция и мы зовём её скобкой Пуассона. Косая симметрия этого коммутатора следует из (2.2.2).

Простое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} (2.2.3) \quad ((X_a, X_b), X_c)f &= ((X_a, X_b)\xi_c^j - X_c(X_a \xi_b^j - X_b \xi_a^j)) \frac{\partial f}{\partial x^j} = \\ &= \left(\frac{\partial \xi_c^j}{\partial x^k} X_a \xi_b^k - \frac{\partial \xi_c^j}{\partial x^k} X_b \xi_a^k - \frac{\partial \xi_b^j}{\partial x^k} X_c \xi_a^k + \xi_c^p \xi_a^q \frac{\partial^2 \xi_b^j}{\partial x^p \partial x^q} + \frac{\partial \xi_a^j}{\partial x^k} X_c \xi_b^k + \xi_c^p \xi_b^q \frac{\partial^2 \xi_a^j}{\partial x^p \partial x^q} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

Если мы изменим порядок параметров, мы окончательно получим уравнение

$$(2.2.4) \quad ((X_a, X_b), X_c)f + ((X_b, X_c), X_a)f + ((X_c, X_a), X_b)f = 0$$

(2.2.4) - это условие Якоби.

Теорема 2.2.1. Коммутатор линейной комбинации операторов

$$X'_a = \lambda_a^b X_b$$

где λ_a^b - функции x , выражается через эти операторы и их коммутаторы

$$(2.2.5) \quad (X'_a, X'_c)f = \mu_{ac}^d X_d f - \mu_{ca}^d X_d f + \lambda_a^b \lambda_c^d (X_b, X_d)f$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутатор имеет вид

$$\begin{aligned} (2.2.6) \quad (X'_a, X'_c)f &= (\lambda_a^b X_b, \lambda_c^d X_d)f \\ &= \lambda_a^b X_b (\lambda_c^d X_d f) - \lambda_c^d X_d (\lambda_a^b X_b f) \\ &= \lambda_a^b X_b \lambda_c^d X_d f + \lambda_a^b \lambda_c^d X_b X_d f - \lambda_c^d X_d \lambda_a^b X_b f - \lambda_c^d \lambda_a^b X_d X_b f \end{aligned}$$

(2.2.5) следует из (2.2.6), если положить

$$\mu_{ac}^d = \lambda_a^b X_b \lambda_c^d$$

□

2.3. Полная система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Теперь мы хотим изучить систему дифференциальных уравнений

$$(2.3.1) \quad X_a f = 0 \quad X_a = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq a \leq r$$

Мы положим, что

$$(2.3.2) \quad \text{rank } \|\xi_a^i\| = r \leq n$$

Это значит, что уравнения (2.3.1) линейно независимы.

Если $r = n$, то, очевидно, единственное решение будет $f = \text{const}$. Утверждение, что каждое решение уравнений (2.3.1) является также решением уравнения

$$(2.3.3) \quad (X_a, X_b)f = 0$$

следует из (2.2.2). Если

$$(2.3.4) \quad (X_a, X_b)f = \gamma_{ab}^c X_c f$$

где γ - функции x , то система дифференциальных уравнений (2.3.1) и (2.3.3) эквивалентна системе дифференциальных уравнений (2.3.1). Мы не можем знать заранее, накладывает ли (2.3.3) новые условия на (2.3.1). Присоединим к системе дифференциальных уравнений (2.3.1) те уравнения системы (2.3.3), для которых не справедливо (2.3.4). Получим s уравнений, $s \geq r$. Для новой системы повторим тот же процесс, получим t уравнений, $t \geq s$, и т. д..

В результате последовательности указанных действий мы можем получить n уравнений. В этом случае система дифференциальных уравнений (2.3.1) имеет единственное решение $f = \text{const}$, так как

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

В противном случае мы получим u уравнений, $u \leq n$, для которых выполняется условие (2.3.4). В этом случае полученная система дифференциальных уравнений называется **полной** порядка u . Решение системы дифференциальных уравнений (2.3.1) является решением полной системы дифференциальных уравнений.

Теорема 2.3.1. Если система дифференциальных уравнений (2.3.1) полна, то полна также система дифференциальных уравнений

$$(2.3.5) \quad X'_a f = \lambda_a^b X_b f = 0$$

где λ функции x

$$(2.3.6) \quad \det \|\lambda_a^b\| \neq 0 \quad 1 \leq a, b \leq r$$

Доказательство. Из (2.3.4) следует, что правая сторона (2.2.5) линейна относительно $X_a f$, которые в силу (2.3.5), (2.3.6) линейно выражаются через операторы $X'_a f$. Следовательно, из (2.2.5) получим выражения вида (2.3.4), что и доказывает утверждение. □

В силу (2.3.2), не нарушая общности, положим

$$(2.3.7) \quad \det \|\xi_a^i\| \neq 0 \quad 1 \leq i, a \leq r$$

Следовательно, мы можем разрешить систему дифференциальных уравнений (2.3.1) относительно $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^r}$ и записать результат в виде

$$(2.3.8) \quad X'_a f = \frac{\partial f}{\partial x^a} + \psi_a^t \frac{\partial f}{\partial x^t} = 0 \quad a = 1, \dots, r \quad t = r+1, \dots, n$$

Эти уравнения имеют вид (2.3.5) и, следовательно, образуют систему дифференциальных уравнений, эквивалентную системе (2.3.1).

Полная система дифференциальных уравнений, представленная в виде (2.3.8), называется **якобиевой**.

Теорема 2.3.2. Полная система дифференциальных уравнений (2.3.1) имеет точно $n - r$ независимых решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично равенству (2.3.4) мы имеем

$$(2.3.9) \quad (X'_a, X'_b)f = \gamma_{ab}^c X'_c f$$

Из (2.2.2) и (2.3.8), следует, что

$$(2.3.10) \quad (X'_a, X'_b)f = (X_a \psi_b^t - X_b \psi_a^t) \frac{\partial f}{\partial x^t} \quad t = r+1, \dots, n$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^r}$ не входят в (2.3.10), $\gamma_{ab}^c = 0$. Следовательно, для полной системы в якобиевой форме

$$(2.3.11) \quad \begin{aligned} (X'_a, X'_b)f &= 0 \\ X_a \psi_b^t - X_b \psi_a^t &= 0 \\ \frac{\partial \psi_b^p}{\partial x^a} + \psi_a^q \frac{\partial \psi_b^p}{\partial x^q} &= \frac{\partial \psi_a^p}{\partial x^b} + \psi_b^q \frac{\partial \psi_a^p}{\partial x^q} \quad a, b = 1, \dots, r \quad p, q = r+1, \dots, n \end{aligned}$$

Сравнивая (2.3.11) и (2.1.2), мы видим, что система дифференциальных уравнений

$$(2.3.12) \quad \frac{\partial x^p}{\partial x^a} = \psi_a^p \quad a = 1, \dots, r \quad p = r+1, \dots, n$$

вполне интегрируемы. Согласно теореме 2.1.2 система дифференциальных уравнений (2.3.8), а следовательно, система дифференциальных уравнений (2.3.1) допускают $n - r$ независимых решений, и более $n - r$ независимых решений система дифференциальных уравнений (2.3.1) иметь не может. \square

2.4. Существенные параметры семейства функций

Определение 2.4.1. Пусть даны n функций

$$f^i(x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^r), i = 1, \dots, n$$

от переменных x^1, \dots, x^n и от параметров a^1, \dots, a^r . Мы предполагаем, что функции f^i непрерывны по x^1, \dots, x^n и a^1, \dots, a^r . Предполагается также, что непрерывны их производные любого порядка. Мы называем параметры a^1, \dots, a^r **существенными параметрами**, если не существует функций A^1, \dots, A^{r-1} , зависящих только от a^1, \dots, a^r , таких, что имеют место тождества

$$(2.4.1) \quad f^i(x, a) = F^i(x, A)$$

\square

Теорема 2.4.2. Для того, чтобы r параметров a^α были существенны, необходимо и достаточно, чтобы функции f^i не удовлетворяли никакому уравнению вида

$$(2.4.2) \quad \phi^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} = 0$$

где $\phi^\alpha \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что параметры a не являются существенными. Тогда существуют A такие, что (2.4.1) удовлетворено и

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial A^\sigma}{\partial a^\alpha} \right\| < r$$

Следовательно, существуют функции $\phi^\alpha(a) \neq 0$ такие, что

$$\phi^\alpha \frac{\partial A^\sigma}{\partial a^\alpha} = 0$$

Таким образом, функции A^1, \dots, A^{r-1} и любая их функция $\Phi(A)$ также удовлетворяют (2.4.2). Функции F^i в (2.4.1) являются примерами функций Φ . Следовательно, если f^i не зависят существенно от a^α , они удовлетворяют системе (2.4.2).

Обратно, положим, что функции f^i удовлетворяют уравнению (2.4.1) для некоторых функций ϕ^α . Это уравнение имеет $r - 1$ независимых решений A^1, \dots, A^{r-1} , которые являются функциями одних a^α и любое решение системы (2.4.2) является функцией A^1, \dots, A^{r-1} . Следовательно, каждая из функций f^i является функцией x^1, \dots, x^n и A^1, \dots, A^{r-1} и a^1, \dots, a^r не являются существенными. \square

Замечание 2.4.3. Из теоремы 2.4.2 следует, что если функции f^i удовлетворяют полной системе s дифференциальных уравнений

$$(2.4.3) \quad \phi_\sigma^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, r \quad \sigma = 1, \dots, s < r$$

то f^i являются функциями x и $r - s$ независимых решений системы (2.4.3), являющихся функциями одних a , и f^i выражаются, следовательно, через $r - s$ существенных параметров. \square

Мы можем интерпретировать систему уравнений (2.4.2) как систему линейных уравнений относительно ϕ^α . Из линейной алгебры следует, что решения системы (2.4.3) порождают векторное пространство, и только при условии

$$(2.4.4) \quad \mu_0 = \text{rank} \left(\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} \right) = r$$

система линейных уравнений (2.4.3) имеет единственное решение $\phi^\alpha = 0$. Таким образом, из замечания 2.4.3 следует, что параметры существенны, если выполнено условие (2.4.4).

Допустим $\mu_0 < r$. Дифференцируя систему дифференциальных уравнений (2.4.2) по x^j , мы получим

$$(2.4.5) \quad \phi^\alpha \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} = 0 \quad \phi^\alpha \frac{\partial f_{,j}^i}{\partial a^\alpha} = 0 \quad f_{,j}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

Пусть

$$(2.4.6) \quad \mu_1 = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} & \frac{\partial f_{,j}^i}{\partial a^\alpha} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\mu_1 \geq \mu_0$. Если $\mu_1 = r$, то система линейных уравнений (2.4.5) допускает единственное решение $\phi^\alpha = 0$. Следовательно, параметры существенны.

Полагая

$$f_{,j_1 \dots j_s}^i = \frac{\partial^s f^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}}$$

последовательными дифференцированиями (2.4.2) получим

$$(2.4.7) \quad \phi^\alpha \frac{\partial f_{,j_1 \dots j_s}^i}{\partial a^\alpha} = 0$$

Обозначим

$$(2.4.8) \quad \mu_s = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha} & \frac{\partial f_{,j}^i}{\partial a^\alpha} & \dots & \frac{\partial f_{,j_1 \dots j_s}^i}{\partial a^\alpha} \end{pmatrix}$$

Таким образом мы получим последовательность рангов

$$(2.4.9) \quad \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_s \leq \dots \leq r$$

Теорема 2.4.4. Число существенных параметров, через которые выражаются функции $f^i(x, a)$, равно максимальному числу, содержащемуся в последовательности (2.4.9).

Доказательство. Если какое-нибудь μ_s равно r , то $\phi^\alpha = 0$ и r параметров существенны.

Предположим, $\mu_{s-1} < r$ и $\mu_s = \mu_{s-1}$. Из этого утверждения следует

$$(2.4.10) \quad \frac{\partial f_{,j_1 \dots j_s}^i}{\partial a^\alpha} = \sum_{t < s} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \frac{\partial f_{,k_1 \dots k_t}^i}{\partial a^\alpha}$$

Дифференцируя равенство (2.4.10) по x^p , мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{,j_1 \dots j_s p}^i}{\partial a^\alpha} &= \sum_{t < s} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \frac{\partial f_{,k_1 \dots k_t p}^i}{\partial a^\alpha} \\ &= \sum_{t < s-1} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \frac{\partial f_{,k_1 \dots k_t p}^i}{\partial a^\alpha} + \sum_{t=s-1, u < s} \lambda_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_t} \lambda_{k_1 \dots k_t p}^{l_1 \dots l_u} \frac{\partial f_{,l_1 \dots l_u}^i}{\partial a^\alpha} \end{aligned}$$

Следовательно, $\mu_{s+1} = \mu_{s-1}$.

Так как $\mu_s < r$, и система линейных уравнений (2.4.2), (2.4.7) имеет ранг μ_s , то $r - \mu_s$ из функций ϕ^α могут быть выбраны произвольно, причём остальные полностью определяются этим выбором. Возьмём $\phi^1, \dots, \phi^{r-\mu_s}$ функциями одних только a . Тогда

$$\phi^\sigma = \lambda_\rho^\sigma \phi^\rho \quad \rho = 1, \dots, r - \mu_s \quad \sigma = r - \mu_s + 1, \dots, r$$

где λ - функция от x и a . Соответственно этому существует $r - \mu_s$ независимых уравнения (2.4.2). Коммутатор любых двух из этих уравнений, приравненный 0, имеет f^i в качестве решений, поэтому он является линейной комбинацией данных уравнений. Следовательно, эти уравнения образуют полную систему.

Таким образом, данные функции выражаются через μ_s существенных параметров. \square

Группа Ли

3.1. Операция на группе Ли

Пусть G является r -параметрической группой Ли с операцией

$$(3.1.1) \quad a_3^L = \varphi^L(a_1, a_2) \quad a_3 = a_1 a_2$$

и нейтральным элементом e .

Все операторы, которые мы определим ниже связаны с представлениями левого и правого сдвига и будут иметь дополнительный индекс r или l , говорящий нам, какой тип сдвига они описывают.

Сперва мы введём операторы

$$(3.1.2) \quad A_r^K(a, b) = \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial b^L}$$

$$(3.1.3) \quad A_l^K(a, b) = \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial a^L}$$

как производная левого и правого сдвигов.

Теорема 3.1.1.

$$(3.1.4) \quad A_r(a, bc) A_r(b, c) = A_r(ab, c)$$

$$(3.1.5) \quad A_l(ab, c) A_l(a, b) = A_l(a, bc)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операция ассоциативна

$$(3.1.6) \quad a(bc) = (ab)c$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, мы можем найти производные этого равенства

$$(3.1.7) \quad \frac{\partial a(bc)}{\partial bc} \frac{\partial bc}{\partial c} = \frac{\partial (ab)c}{\partial c}$$

$$(3.1.8) \quad \frac{\partial a(bc)}{\partial a} = \frac{\partial (ab)c}{\partial ab} \frac{\partial ab}{\partial a}$$

(3.1.4) следует из (3.1.7). (3.1.5) следует из (3.1.8). □

Так как $ae = a$ и $eb = b$, мы получаем равенства

$$(3.1.9) \quad A_l^K(a, e) = \delta_L^K$$

$$(3.1.10) \quad A_r^K(e, b) = \delta_L^K$$

Теорема 3.1.2. Оператор $A_l(a, b)$ имеет обратный оператор $A_l(ab, b^{-1})$

$$(3.1.11) \quad A_l^{-1}(a, b) = A_l(ab, b^{-1})$$

Оператор $A_r(b, c)$ имеет обратный оператор $A_r(b^{-1}, bc)$

$$(3.1.12) \quad A_r^{-1}(b, c) = A_r(b^{-1}, bc)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.1.4) мы имеем $(a = b^{-1})$

$$(3.1.13) \quad A_r(b^{-1}, bc)A_r(b, c) = A_r(b^{-1}b, c) = A_r(e, c) = \delta$$

(3.1.12) следует из (3.1.13).

Согласно (3.1.5) мы имеем $(c = b^{-1})$

$$(3.1.14) \quad A_l(ab, b^{-1})A_l(a, b) = A_l(a, bb^{-1}) = A_l(a, e) = \delta$$

(3.1.11) следует из (3.1.14). □

Теорема 3.1.3. Операторы $A_l(a, b)$ и $A_r(a, b)$ обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следствие теоремы 3.1.2. □

Мы определим базовые операторы группы Ли

$$(3.1.15) \quad \psi_r^L(a) = A_r^L(a, e) \quad \psi_r(a) = A_r(a, e)$$

$$(3.1.16) \quad \psi_l^L(b) = A_l^L(e, b) \quad \psi_l(b) = A_l(e, b)$$

Из (3.1.9) и (3.1.10) немедленно следует, что

$$(3.1.17) \quad \psi_l^K(e) = \delta_L^K$$

$$(3.1.18) \quad \psi_r^K(e) = \delta_L^K$$

По определению базовые операторы линейно отображают касательную плоскость $T_e G$ в касательную плоскость $T_a G$.

Теорема 3.1.4. Операторы ψ_l и ψ_r обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следствие теоремы 3.1.3 и определений (3.1.16) и (3.1.15). □

Так как операторы ψ_r и ψ_l имеют обратные операторы мы определим операторы

$$(3.1.19) \quad \lambda_r(a) = \psi_r^{-1}(a)$$

$$(3.1.20) \quad \lambda_l(a) = \psi_l^{-1}(a)$$

которые отображают $T_a G \rightarrow T_e G$

Теорема 3.1.5.

$$(3.1.21) \quad \lambda_r(a) = A_r(a^{-1}, a)$$

$$(3.1.22) \quad \lambda_l(a) = A_l(a, a^{-1})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.1.20), (3.1.16) и (3.1.11) мы получим

$$\lambda_l(a) = A_l^{-1}(e, a) = A_l(a, a^{-1})$$

Это доказывает (3.1.22).

Согласно (3.1.19), (3.1.15) и (3.1.12) мы получим

$$\lambda_r(a) = A_r^{-1}(a, e) = A_r(a^{-1}, a)$$

Это доказывает (3.1.21). □

Теорема 3.1.6.

$$(3.1.23) \quad A_r(a, b) = \psi_r(ab)\lambda_r(b)$$

$$(3.1.24) \quad A_l(a, b) = \psi_l(ab)\lambda_l(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c = e$ в (3.1.4)

$$(3.1.25) \quad A_r(a, b)A_r(b, e) = A_r(ab, e)$$

Из равенств (3.1.15), (3.1.25) следует

$$(3.1.26) \quad A_r(a, b)\psi_r(b) = \psi_r(ab)$$

Из (3.1.26) следует

$$(3.1.27) \quad A_r(a, b) = \psi_r(ab)\psi_r^{-1}(b)$$

(3.1.23) следует из (3.1.27) на основании (3.1.19).

Положим $a = e$ в (3.1.5)

$$(3.1.28) \quad A_l(b, c)A_l(e, b) = A_l(e, bc)$$

Из равенств (3.1.16), (3.1.28) следует

$$(3.1.29) \quad A_l(b, c)\psi_l(b) = \psi_l(bc)$$

Из (3.1.29) следует

$$(3.1.30) \quad A_l(a, b) = \psi_l(ab)\psi_l^{-1}(a)$$

(3.1.24) следует из (3.1.30) на основании (3.1.20). \square

Теорема 3.1.7. Операция группы Ли удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(3.1.31) \quad \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial b^L} = \psi_{rT}^K(ab)\lambda_{rL}^T(b) \quad \frac{\partial ab}{\partial b} = \psi_r(ab)\lambda_r(b)$$

$$(3.1.32) \quad \frac{\partial \varphi^K(a, b)}{\partial a^L} = \psi_{lT}^K(ab)\lambda_{lL}^T(a) \quad \frac{\partial ab}{\partial a} = \psi_l(ab)\lambda_l(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (3.1.31) является следствием равенств (3.1.23) и (3.1.2). (3.1.32) является следствием равенств (3.1.24) и (3.1.3). \square

Теорема 3.1.8.

$$(3.1.33) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\psi_l(a^{-1})\lambda_r(a)$$

$$(3.1.34) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\psi_r(a^{-1})\lambda_l(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенство $e = a^{-1}a$ по a , мы получим равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial a^{-1}a}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} + \frac{\partial a^{-1}a}{\partial a} = \\ &= A_l(a^{-1}, a) \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} + A_r(a^{-1}, a) \\ \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} &= -A_l^{-1}(a^{-1}, a)A_r(a^{-1}, a) \end{aligned}$$

Пользуясь (3.1.21) и (3.1.22), мы получим

$$(3.1.35) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\lambda_l^{-1}(a^{-1})\lambda_r(a)$$

(3.1.33) следует из (3.1.35).

Дифференцируя равенство $e = aa^{-1}$ по a , мы получим равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial aa^{-1}}{\partial a} + \frac{\partial aa^{-1}}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = \\ &= A_l(a, a^{-1}) + A_r(a, a^{-1}) \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} \\ \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} &= -A_r^{-1}(a, a^{-1}) A_l(a, a^{-1}) \end{aligned}$$

Пользуясь (3.1.21) и (3.1.22) мы получим

$$(3.1.36) \quad \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} = -\lambda_r^{-1}(a^{-1}) \lambda_l(a)$$

(3.1.34) следует из (3.1.36). \square

Теорема 3.1.9.

$$(3.1.37) \quad \frac{\partial a^{-1}b}{\partial a} = -\psi_l(a^{-1}b) \psi_r^{-1}(a)$$

$$(3.1.38) \quad \frac{\partial ba^{-1}}{\partial a} = -\psi_r(ba^{-1}) \psi_l^{-1}(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и равенствами (3.1.24), (3.1.33), мы получим

$$\begin{aligned} (3.1.39) \quad \frac{\partial a^{-1}b}{\partial a} &= \frac{\partial a^{-1}b}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} \\ &= -A_l(a^{-1}, b) \psi_l(a^{-1}) \lambda_r(a) \\ &= -\psi_l(a^{-1}b) \psi_l^{-1}(a^{-1}) \psi_l(a^{-1}) \lambda_r(a) \end{aligned}$$

(3.1.37) следует из (3.1.39).

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и равенствами (3.1.23), (3.1.34), мы получим

$$\begin{aligned} (3.1.40) \quad \frac{\partial ba^{-1}}{\partial a} &= \frac{\partial ba^{-1}}{\partial a^{-1}} \frac{\partial a^{-1}}{\partial a} \\ &= -A_r(b, a^{-1}) \psi_r(a^{-1}) \lambda_l(a) \\ &= -\psi_r(ba^{-1}) \psi_r^{-1}(a^{-1}) \psi_r(a^{-1}) \lambda_l(a) \end{aligned}$$

(3.1.38) следует из (3.1.40). \square

3.2. 1-параметрическая группа

Если многообразие группы имеет размерность 1, мы имеем группу, зависящую от 1 параметра. В этом случае операция на группе имеет вид

$$c = \varphi(a, b)$$

где a, b, c - числа. В этом случае наша запись будет упрощена. Нам даны не операторы, а функции

$$\begin{aligned} A_l(a, b) &= \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a} \\ A_r(a, b) &= \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \end{aligned}$$

которые по определению удовлетворяют уравнению

$$A_l(a, e) = 1$$

$$A_r(e, b) = 1$$

Мы также определим базовую функцию

$$\psi_r(a) = A_r(a, e)$$

$$\psi_l(b) = A_l(e, b)$$

Функции $\psi_r(a)$ и $\psi_l(a)$ никогда не обращаются в 0 и

$$\lambda_r(a) = \frac{1}{\psi_r(a)}$$

$$\lambda_l(a) = \frac{1}{\psi_l(a)}$$

Теорема 3.2.1. *Операция на 1-параметрической группе Ли удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$(3.2.1) \quad \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} = \frac{\psi_r(ab)}{\psi_r(b)}$$

Доказательство. Это следствие равенства (3.1.31). \square

Теорема 3.2.2. *Мы можем определить координату A на 1-параметрической группе таким образом, что операция Φ на группе имеет вид*

$$(3.2.2) \quad \Phi(A, B) = A + B$$

и $E = 0$ - единица группы.

Доказательство. Мы определим новую переменную A таким образом, что

$$(3.2.3) \quad dA = \frac{da}{\psi_r(a)}$$

Так как $\psi_r(a) \neq 0$, существуют взаимнооднозначное отображение $A = F(a)$ и его обратное отображение $a = f(A)$. Это значит, что если $A = F(a)$, $B = F(b)$, $C = F(c)$ и $c = \varphi(a, b)$, то существует функция Φ такая, что

$$C = \Phi(A, B) = F(\varphi(a, b))$$

Мы получили производную

$$\frac{\partial \Phi(A, B)}{\partial B} = \frac{dC}{dc} \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \frac{db}{dB}$$

Используя (3.2.3) и (3.2.1), мы получим

$$\frac{\partial \Phi(A, B)}{\partial B} = \frac{1}{\psi_r(c)} \frac{\psi_r(c)}{\psi_r(b)} \psi_r(b) = 1$$

Таким образом, мы получили

$$(3.2.4) \quad \Phi(A, B) = \xi(A) + B$$

Если мы возьмём решение уравнения (3.2.3) в виде

$$A = \int_e^a \frac{da}{\psi_r(a)}$$

то мы увидим, что $A = 0$ - единица группы. Если мы положим $B = 0$ в (3.2.4), мы получим

$$(3.2.5) \quad A = \xi(A)$$

(3.2.2) следует из (3.2.4) и (3.2.5) □

3.3. Правый сдвиг

Для правого сдвига [1]-(2.4.14) система (3.1.31) принимает вид

$$(3.3.1) \quad \frac{\partial b'^K}{\partial a^L} = \psi_{rT}^K(b') \lambda_{rL}^T(a)$$

Функции b'^K являются решением системы (3.3.1) и согласно [1]-(2.4.14) они зависят от b^1, \dots, b^n , которые мы можем предположить постоянными. Таким образом, решение системы (3.3.1) зависит от n произвольных констант и, следовательно, система (3.3.1) вполне интегрируема. Условие её интегрируемости имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^R} \lambda_{rP}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rP}^T(a)}{\partial a^R} = \\ & = \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^P} \lambda_{rR}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rR}^T(a)}{\partial a^P} \end{aligned}$$

Согласно (3.3.1), мы можем записать это условие в более простой форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') \lambda_{rR}^V(a) \lambda_{rP}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rP}^T(a)}{\partial a^R} = \\ & = \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') \lambda_{rP}^V(a) \lambda_{rR}^T(a) + \psi_{rT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{rR}^T(a)}{\partial a^P} \\ & \quad - \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{rV}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rT}^S(b') = \\ & = \psi_{rU}^L(b') \psi_{rT}^P(a) \psi_{rV}^R(a) \left(\frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} \right) \end{aligned}$$

Мы определим **правые структурные константы алгебры Ли**

$$(3.3.2) \quad C_{rVT}^U = \psi_{rV}^R(a) \psi_{rT}^P(a) \left(\frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} \right)$$

Тогда мы получим

$$(3.3.3) \quad \frac{\partial \psi_{rT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{rV}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{rT}^S(b') = C_{rVT}^U \psi_{rU}^L(b')$$

Если мы продифференцируем это равенство по a^P , мы получим

$$\frac{\partial C_{rVT}^U}{\partial a^P} \psi_{rU}^L(b') = 0$$

так как $\psi_{rU}^L(b')$ не зависит от a . В тоже время $\psi_{rU}^L(b')$ линейно независимы, так как $\det \|\psi_{rU}^L\| \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial C_{rVT}^U}{\partial a^P} = 0$$

и C_{rTV}^U являются константами. Мы называем их структурными константами. Из (3.3.2) следует, что

$$(3.3.4) \quad C_{rTV}^U \lambda_{rP}^T(a) \lambda_{rR}^V(a) = \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} - \frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P}$$

Мы называем (3.3.4) уравнением Маурера.

Теорема 3.3.1. *Векторные поля, определённые дифференциальным оператором*

$$(3.3.5) \quad X_{rV} = \psi_{rV}^S(a) \frac{\partial}{\partial a^S}$$

линейно независимы и их коммутатор имеет вид

$$(X_{rT}, X_{rV}) = C_{rTV}^U X_{rU}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная независимость векторных полей следует из теоремы 3.1.4. Тогда мы видим, что согласно (3.3.3)

$$\begin{aligned} (X_{rT}, X_{rV}) &= (X_{rT} \psi_{rV}^D - X_{rV} \psi_{rT}^D) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= \left(\psi_{rT}^P(a) \frac{\partial \psi_{rV}^D(a)}{\partial a^P} - \psi_{rV}^R(a) \frac{\partial \psi_{rT}^D(a)}{\partial a^R} \right) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= C_{rTV}^U \psi_{rU}^D(a) \frac{\partial}{\partial a^D} = C_{rTV}^U X_{rU} \end{aligned}$$

□

Пусть задан гомоморфизм $f : G_1 \rightarrow G$ 1-параметрической группы Ли G_1 в группу G . Образ этой группы является 1-параметрической подгруппой. Если t - координата на группе G_1 , мы можем записать $a = f(t)$ и найти дифференциальное уравнение для этой подгруппы. Мы положим в случае правого сдвига, что $a = f(t_1)$, $b = f(t_2)$, $c = ab = f(t)$, $t = t_1 + t_2$. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \frac{dc^K}{dt} &= \frac{\partial c^K}{\partial b^L} \frac{db^L}{dt} = \psi_{rT}^K(c) \lambda_{rL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \frac{dt_2}{dt} \\ \frac{dc^K}{dt} &= \psi_{rT}^K(c) \lambda_{rL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \end{aligned}$$

Левая часть не зависит от t_2 , следовательно, правая часть не зависит от t_2 . Мы положим, что

$$\lambda_{rL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} = \alpha^T$$

Таким образом, мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dc^K}{dt} = \psi_{rT}^K(c) \alpha^T$$

Так как ψ_r - производная правого сдвига в единице группы, это равенство означает, что 1-параметрическая группа определена вектором $\alpha^T \in T_e G$ и переносит этот вектор вдоль 1-параметрической группы без изменений. Мы называем это векторное поле **правоинвариантным векторным полем**. Мы определим векторное произведение T_e как

$$(3.3.6) \quad [\alpha, \beta]^T = C_{rRS}^T \alpha^R \beta^S$$

Пространство $T_e G$, снабжённое такой операцией, становится алгеброй Ли \mathfrak{g}_r . Мы называем её **определённой справа алгеброй Ли группы Ли**

Теорема 3.3.2. *Пространство правоинвариантных векторных полей имеет конечную размерность, равную размерности группы Ли. Это алгебра Ли с произведением равным коммутатору векторных полей и эта алгебра изоморфна алгебре Ли \mathfrak{g}_r .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из (3.3.5) и (3.3.6), так как α^K и β^K являются константами

$$\begin{aligned} (X_{rT}\alpha^T, X_{rV}\beta^V) &= (X_{rT}, X_{rV})\alpha^T\beta^V = \\ &= C_{rTV}^U X_{rU}\alpha^T\beta^V = [\alpha, \beta]^U X_{rU} \end{aligned}$$

□

3.4. Левый сдвиг

Для левого сдвига [1]-(2.4.12) система (3.1.32) принимает вид

$$(3.4.1) \quad \frac{\partial b'^K}{\partial a^L} = \psi_{lT}^K(b') \lambda_{lL}^T(a)$$

Функции b'^K являются решением системы (3.4.1) и согласно [1]-(2.4.12) они зависят от b^1, \dots, b^n , которые мы можем предположить постоянными. Таким образом, решение системы (3.4.1) зависит от n произвольных констант и, следовательно, система (3.4.1) вполне интегрируема. Условие её интегрируемости имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^R} \lambda_{lP}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lP}^T(a)}{\partial a^R} &= \\ = \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \frac{\partial b'^S}{\partial a^P} \lambda_{lR}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lR}^T(a)}{\partial a^P} \end{aligned}$$

Согласно (3.4.1), мы можем записать это условие в более простой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') \lambda_{lR}^V(a) \lambda_{lP}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lP}^T(a)}{\partial a^R} &= \\ = \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') \lambda_{lP}^V(a) \lambda_{lR}^T(a) + \psi_{lT}^L(b') \frac{\partial \lambda_{lR}^T(a)}{\partial a^P} &= \\ \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{lV}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lT}^S(b') &= \\ = \psi_{lU}^L(b') \psi_{lT}^P(a) \psi_{lV}^R(a) \left(\frac{\partial \lambda_{lR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{lP}^U(a)}{\partial a^R} \right) \end{aligned}$$

Мы определим **левые структурные константы алгебры Ли**

$$(3.4.2) \quad C_{lVT}^U = \psi_{lV}^R(a) \psi_{lT}^P(a) \left(\frac{\partial \lambda_{lR}^U(a)}{\partial a^P} - \frac{\partial \lambda_{lP}^U(a)}{\partial a^R} \right)$$

Тогда мы получим

$$(3.4.3) \quad \frac{\partial \psi_{lT}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lV}^S(b') - \frac{\partial \psi_{lV}^L(b')}{\partial b'^S} \psi_{lT}^S(b') = C_{lVT}^U \psi_{lU}^L(b')$$

Если мы продифференцируем это равенство по a^P , мы получим

$$\frac{\partial C_{lVT}^U}{\partial a^P} \psi_{lU}^L(b') = 0$$

так как $\psi_U^L(b')$ не зависит от a . В тоже время $\psi_U^L(b')$ линейно независимы, так как $\det\|\psi_U^L\| \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial C_{l_{VT}}^U}{\partial a^P} = 0$$

и $C_{l_{TV}}^U$ являются константами. Мы называем их структурными константами. Из (3.4.2) следует, что

$$(3.4.4) \quad C_{l_{TV}}^U \lambda_{rP}^T(a) \lambda_{rR}^V(a) = \frac{\partial \lambda_{rP}^U(a)}{\partial a^R} - \frac{\partial \lambda_{rR}^U(a)}{\partial a^P}$$

Мы называем (3.4.4) уравнением Маурера.

Теорема 3.4.1. *Векторные поля, определённые дифференциальным оператором*

$$(3.4.5) \quad X_{lV} = \psi_{lV}^S(a) \frac{\partial}{\partial a^S}$$

линейно независимы и коммутатор имеет вид

$$(X_{lT}, X_{lV}) = C_{l_{TV}}^U X_{lU}$$

Доказательство. Линейная независимость векторных полей следует из теоремы 3.1.4. Тогда мы видим, что согласно (3.4.3)

$$\begin{aligned} (X_{lT}, X_{lV}) &= (X_{lT} \psi_{lV}^D - X_{lV} \psi_{lT}^D) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= \left(\psi_{lT}^P(a) \frac{\partial \psi_{lV}^D(a)}{\partial a^P} - \psi_{lV}^R(a) \frac{\partial \psi_{lT}^D(a)}{\partial a^R} \right) \frac{\partial}{\partial a^D} = \\ &= C_{l_{TV}}^U \psi_{lU}^D(a) \frac{\partial}{\partial a^D} = C_{l_{TV}}^U X_U \end{aligned}$$

□

Пусть задан гомоморфизм $f : G_1 \rightarrow G$ 1-параметрической группы Ли G_1 в группу G . Образ этой группы является 1-параметрической подгруппой. Если t - координата на группе G_1 , мы можем записать $a = f(t)$ и найти дифференциальное уравнение для этой подгруппы. Мы положим в случае левого сдвига, что $a = f(t_1)$, $b = f(t_2)$, $c = ab = f(t)$, $t = t_1 + t_2$. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \frac{dc^K}{dt} &= \frac{\partial c^K}{\partial b^L} \frac{db^L}{dt} = \psi_{lT}^K(c) \lambda_{lL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \frac{dt_2}{dt} \\ \frac{dc^K}{dt} &= \psi_{lT}^K(c) \lambda_{lL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} \end{aligned}$$

Левая часть не зависит от t_2 , следовательно, правая часть не зависит от t_2 . Мы положим, что

$$\lambda_{lL}^T(b) \frac{db^L}{dt_2} = \alpha^T$$

Таким образом, мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dc^K}{dt} = \psi_{lT}^K(c) \alpha^T$$

Так как ψ_l - производная правого сдвига в единице группы, это равенство означает, что 1-параметрическая группа определена вектором $\alpha^T \in T_e G$ и переносит этот вектор вдоль 1-параметрической группы без изменений. Мы называем

это векторное поле **левоинвариантным векторным полем**. Мы определим векторное произведение T_e как

$$(3.4.6) \quad [\alpha, \beta]^T = C_{RS}^T \alpha^R \beta^S$$

Пространство $T_e G$, снабжённое такой операцией, становится алгеброй Ли \mathfrak{g}_l . Мы называем её **определённой слева алгеброй Ли группы Ли**

Теорема 3.4.2. *Пространство правоинвариантных векторных полей имеет конечную размерность, равную размерности группы Ли. Это алгебра Ли с произведением равным коммутатору векторных полей и эта алгебра изоморфна алгебре Ли \mathfrak{g}_l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из (3.4.5) и (3.4.6), так как α^K и β^K являются константами

$$\begin{aligned} (X_{lT} \alpha^T, X_{lV} \beta^V) &= (X_{lT}, X_{lV}) \alpha^T \beta^V = \\ &= C_{TV}^U X_{lU} \alpha^T \beta^V = [\alpha, \beta]^U X_{lU} \end{aligned}$$

□

3.5. Отношение между алгебрами Ли \mathfrak{g}_l и \mathfrak{g}_r

Мы определили две различные алгебры Ли на пространстве $T_e G$. Теперь наша задача - это определить отношение между этими алгебрами. Мы начнём решать эту задачу с анализа разложения Тейлора групповой операции.

Теорема 3.5.1. *С точностью до бесконечно малых второго порядка, структура операции на группе Ли*

$$(3.5.1) \quad \varphi^K(a, b) = a^K + b^K - e^K + I_{LM}^K (a^M - e^M)(b^L - e^L)$$

где мы определили **инфинитезимальные образующие группы Ли**

$$I_{LM}^K = I_{lLM}^K = I_{rML}^K$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем найти ряд Тейлора произведения по обоим аргументам. Однако подобно разделам 3.3 и 3.4, мы можем рассматривать один аргумент как параметр и найти ряд Тейлора по другому аргументу. В этом случае его коэффициенты будут зависеть от первого аргумента.

Таким образом, согласно (3.1.2) и (3.1.15), произведение в окрестности $a \in G$ имеет ряд Тейлора относительно b

$$(3.5.2) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= a^K + \psi_{rL}^K(a)(b^L - e^L) + o(b^L - e^L) \\ ab &= a + \psi_r(a)(b - e) + o(b - e) \end{aligned}$$

где коэффициенты разложения зависят от a . В тоже время $\psi_r(a)$ также имеет ряд Тейлора в окрестности e

$$(3.5.3) \quad \psi_{rL}^K(a) = \delta_L^K + I_{rLM}^K (a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

Если мы подставим (3.5.3) в (3.5.2), мы получим разложение

$$\begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= a^K + (\delta_L^K + I_{rLM}^K (a^M - e^M) + o(a^M - e^M))(b^L - e^L) + o(b^L - e^L) \\ (3.5.4) \quad \varphi^K(a, b) &= a^K + b^K - e^K + I_{rLM}^K (a^M - e^M)(b^L - e^L) + o(a^M - e^M, b^L - e^L) \end{aligned}$$

Согласно (3.1.3) и (3.1.16), произведение в окрестности $b \in G$ имеет ряд Тейлора относительно a

$$(3.5.5) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= b^K + \psi_L^K(b)(a^L - e^L) + o(a^L - e^L) \\ ab &= b + \psi_L(b)(a - e) + o(a - e) \end{aligned}$$

где коэффициенты разложения зависят от b . В тоже время $\psi_L(b)$ также имеет ряд Тейлора в окрестности e

$$(3.5.6) \quad \psi_L^K(b) = \delta_L^K + I_{LM}^K(b^M - e^M) + o(b^M - e^M)$$

Если мы подставим (3.5.6) в (3.5.5) мы получим разложение

$$(3.5.7) \quad \begin{aligned} \varphi^K(a, b) &= b^K + (\delta_L^K + I_{LM}^K(b^M - e^M) + o(b^M - e^M))(a^L - e^L) + o(a^L - e^L) \\ \varphi^K(a, b) &= b^K + a^K - e^K + I_{LM}^K(b^M - e^M)(a^L - e^L) + o(a^M - e^M, b^L - e^L) \end{aligned}$$

(3.5.4) и (3.5.7) являются разложением в ряд Тейлора одной и той же функции и они должны совпадать. Сравнивая их, мы видим, что $I_{LM}^K = I_{rML}^K$. Тогда операция группы Ли имеет ряд Тейлора (3.5.1) \square

Теорема 3.5.2. *С точностью до бесконечно малых второго порядка, структура операции на группе Ли*

$$(3.5.8) \quad \psi_r^K(a) = \delta_L^K + I_{ML}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

$$(3.5.9) \quad \psi_l^K(a) = \delta_L^K + I_{LM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

$$(3.5.10) \quad \lambda_r^K(a) = \delta_L^K - I_{LM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

$$(3.5.11) \quad \lambda_l^K(a) = \delta_L^K - I_{ML}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

Доказательство. (3.5.8) и (3.5.9) следуют из дифференцирования равенства (3.5.1) по a или b и определений (3.1.15) и (3.1.16).

Теперь мы положим, что $\lambda_r^K(a)$ имеет ряд Тейлора

$$(3.5.12) \quad \lambda_r^K(a) = \delta_L^K + J_{LM}^K(a^M - e^M) + o(a^M - e^M)$$

Тогда подставляя (3.5.12) и (3.5.8) в уравнение

$$\lambda_r^K(a)\psi_r^L(a) = \delta_M^K$$

мы получим с точностью до порядка 1

$$\begin{aligned} (\delta_L^K + I_{NL}^K(a^N - e^N) + o(a^N - e^N))(\delta_M^L + J_{MP}^L(a^P - e^P) + o(a^P - e^P)) &= \delta_M^K \\ \delta_M^K + (J_{MN}^K + I_{NM}^K)(a^N - e^N) + o(a^P - e^P) &= \delta_M^K \end{aligned}$$

Следовательно, $J_{MN}^K + I_{NM}^K = 0$ и, подставляя J_{MN}^K в (3.5.12), мы получим (3.5.10).

Таким же образом, мы можем доказать (3.5.11). \square

Следующая теорема следует непосредственно из теоремы 3.5.2.

Теорема 3.5.3.

$$(3.5.13) \quad \left. \frac{\partial \psi_r^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = I_{ML}^K$$

$$(3.5.14) \quad \left. \frac{\partial \psi_l^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = I_{LM}^K$$

$$(3.5.15) \quad \left. \frac{\partial \lambda_r^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = -I_{LM}^K$$

$$(3.5.16) \quad \left. \frac{\partial \lambda_l^K(a)}{\partial a^M} \right|_{a=e} = -I_{ML}^K$$

На основе теоремы 3.5.3 мы можем получить более детальную информацию о левой и правой группах алгебры Ли. Так как определение (3.3.2) не зависит от a , мы можем оценить его, когда $a = e$. Согласно (3.1.17) и (3.5.16), мы получим

$$C_{lTV}^U = \delta_T^P \delta_V^R (-I_{RP}^U + I_{PR}^U) = I_{TV}^U - I_{VT}^U$$

Согласно (3.1.18) и (3.5.15), мы получим

$$C_{rTV}^U = \delta_T^P \delta_V^R (-I_{PR}^U + I_{RP}^U) = I_{VT}^U - I_{TV}^U$$

Следовательно,

$$C_{rTV}^U = -C_{lTV}^U$$

и алгебры \mathfrak{g}_l и \mathfrak{g}_r являются антиизоморфными. Обычно мы подразумеваем, что \mathfrak{g}_l является алгеброй Ли группы Ли и use notation

$$C_{TV}^U = C_{lTV}^U$$

Пусть $\mathfrak{g} = T_e G$ является алгеброй Ли группы Ли G с операцией

$$\alpha_3^L = C_{MN}^L \alpha_1^M \alpha_2^N \quad \alpha_3 = C(\alpha_1, \alpha_2)$$

Представление группы Ли

4.1. Представление группы Ли

Мы будем рассматривать представление группы Ли в непрерывном векторном пространстве.^{4.1} Пусть

$$\begin{aligned}\bar{v}' &= \bar{f}(a)(\bar{v}) \\ \bar{v}'' &= \bar{f}(b)(\bar{v}') = \bar{f}(c)(\bar{v})\end{aligned}$$

Пусть \bar{e} - базис векторного пространства M . Тогда разложение вектора $\bar{f}(a)(\bar{v})$ имеет вид

$$\bar{f}(a)(\bar{v}) = f^i(a)(\bar{v})\bar{e}_i$$

Теорема 4.1.1. Базовый вектор представления группы Ли *определён равенством*

$$(4.1.1) \quad \bar{\xi}(\bar{v}') = \bar{\beta}(b, \bar{v}') \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial b} \Big|_{b=e}$$

$$(4.1.2) \quad \xi_L^a(\bar{v}') = \beta_p^a(b, \bar{v}') \frac{\partial f^p(b)(\bar{v}')}{\partial b^L} \Big|_{b=e}$$

где мы ввели оператор $\bar{\beta}(a, \bar{v})$ такой, что

$$\bar{\beta} \frac{\partial \bar{f}(a)(\bar{v})}{\partial \bar{v}} = 1 \quad \beta_p^a \frac{\partial f^p(a)(\bar{v})}{\partial v^b} = \delta_b^a$$

Ковариантное представление группы Ли G в множестве M

$$(4.1.3) \quad c = ba$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$(4.1.4) \quad \frac{\partial \bar{f}(a)(\bar{v})}{\partial a} = \bar{\xi}(\bar{v}') \lambda_r(a) \quad \frac{\partial f^i(a)(\bar{v})}{\partial a^M} = \xi_L^i(\bar{v}') \lambda_{rM}^L(a)$$

Контравариантное представление группы Ли G в множестве M

$$(4.1.5) \quad c = ab$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$(4.1.6) \quad \frac{\partial \bar{f}(a)(\bar{v})}{\partial a} = \bar{\xi}(\bar{v}') \lambda_l(a) \quad \frac{\partial f^i(a)(\bar{v})}{\partial a^M} = \xi_L^i(\bar{v}') \lambda_{lM}^L(a)$$

^{4.1}В разделе [1]-2.4 мы рассмотрели общую концепцию представления группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы выразим b через a и c и продифференцируем равенство^{4.2}

$$\bar{f}(c)(\bar{v}) = \bar{f}(b)(\bar{f}(a)(\bar{v}))$$

по a

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial \bar{v}'} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial a} = 0 \\ & \frac{\partial \bar{v}'}{\partial a} = -\bar{\beta}(b, \bar{v}') \frac{\partial \bar{f}(b)(\bar{v}')}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} \end{aligned}$$

Левая часть не зависит от b , поэтому и правая часть не зависит от b . Определим правую часть, когда $b = e$.

Если представление ковариантно, то из равенств (4.1.3), (3.1.38), когда $ca^{-1} = e$, следует, что

$$(4.1.8) \quad \left. \frac{\partial b}{\partial a} \right|_{ca^{-1}=e} = \left. \frac{\partial ca^{-1}}{\partial a} \right|_{ca^{-1}=e} = -\psi_r(ca^{-1})|_{ca^{-1}=e} \psi_l^{-1}(a) = \lambda_l(a)$$

Равенство (4.1.4) следует из равенств (4.1.1), (4.1.8), (4.1.7).

Если представление контравариантно, то из равенств (4.1.5), (3.1.37), когда $a^{-1}c = e$, следует, что

$$(4.1.9) \quad \left. \frac{\partial b}{\partial a} \right|_{a^{-1}c=e} = \left. \frac{\partial a^{-1}c}{\partial a} \right|_{a^{-1}c=e} = -\psi_l(a^{-1}c)|_{a^{-1}c=e} \psi_r^{-1}(a) = \lambda_r(a)$$

Равенство (4.1.4) следует из равенств (4.1.1), (4.1.9), (4.1.7). \square

Теорема 4.1.2. ξ - это оператор, отображающий алгебру Ли \mathfrak{g} в алгебру левинвариантных векторных полей на M . Элемент $\alpha \in \mathfrak{g}$ порождает левинвариантное векторное поле

$$B^a = \xi_M^a(u')\alpha^M$$

на многообразии M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ξ отображает алгебру Ли \mathfrak{g} в касательную плоскость многообразия. Если $\alpha \in \mathfrak{g}$ зависит от параметра t , мы можем записать дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dt} = \xi(u')\lambda_l(a)\lambda_r(a)\frac{da}{dt}$$

Если a принадлежит 1-параметрической подгруппе, порождённой элементом $\alpha \in \mathfrak{g}$, то он удовлетворяет уравнению Следовательно, пользуясь (3.1.19), мы получим

$$\frac{du'}{dt} = \xi(u')\lambda_r(a)\psi_r(a)\alpha = \xi(u')\alpha$$

\square

^{4.2}Смотри равенства [1]-(2.4.1) и [1]-(2.4.5).

4.2. Алгебраические свойства представления

Теорема 4.2.1. Пусть \bar{f}_1 - представление группы G в векторном пространстве V_1 . Пусть \bar{f}_2 - представление группы G в векторном пространстве V_2 . Пусть геометрический объект \bar{v} является тензорным произведением геометрических объектов $\bar{v}_1 \in V_1$ и $\bar{v}_2 \in V_2$

$$(4.2.1) \quad \bar{f}(a)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) = \bar{f}_1(a)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(a)(\bar{v}_2)$$

Если представления \bar{f}_1 и \bar{f}_2 ковариантны, то отображение \bar{f} - ковариантное представление группы G в векторном пространстве $V = V_1 \otimes V_2$. Если представления \bar{f}_1 и \bar{f}_2 контравариантны, то отображение \bar{f} - контравариантное представление группы G в векторном пространстве $V = V_1 \otimes V_2$. Мы будем называть представление \bar{f} **тензорным произведением представлений** и

$$(4.2.2) \quad \bar{\xi}(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) = \bar{\xi}_1(\bar{v}_1) \otimes \bar{v}_2 + \bar{v}_1 \otimes \bar{\xi}_2(\bar{v}_2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что мы получили новое представление. Если мы применим преобразования для $a \in G$ и $b \in G$ последовательно, то мы имеем

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \bar{f}(a)(\bar{f}(b)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2)) &= \bar{f}(a)(\bar{f}_1(b)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(b)(\bar{v}_2)) \\ &= \bar{f}_1(a)(\bar{f}_1(b)(\bar{v}_1)) \otimes \bar{f}_2(a)(\bar{f}_2(b)(\bar{v}_2)) \end{aligned}$$

Так, если \bar{f}_1 и \bar{f}_2 - ковариантные представления, то из (4.2.3) следует

$$\begin{aligned} \bar{f}(a)(\bar{f}(b)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2)) &= \bar{f}_1(ab)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(ab)(\bar{v}_2) \\ &= \bar{f}(ab)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) \end{aligned}$$

Следовательно, \bar{f} тоже ковариантное представление. Если \bar{f}_1 и \bar{f}_2 - контравариантные представления, то из (4.2.3) следует

$$\begin{aligned} \bar{f}(a)(\bar{f}(b)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2)) &= \bar{f}_1(ba)(\bar{v}_1) \otimes \bar{f}_2(ba)(\bar{v}_2) \\ &= \bar{f}(ba)(\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) \end{aligned}$$

Следовательно, \bar{f} тоже контравариантное представление.

Дифференцируя уравнение (4.2.1) по a , мы получим

$$(4.2.4) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial a} \otimes \bar{f}_2 + \bar{f}_1 \otimes \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial a}$$

Мы получим (4.2.2) из (4.2.4) по определению, когда $a = e$. \square

Почему важно, чтобы \bar{f}_1 и \bar{f}_2 были одного и того же типа? Из (4.2.3) видно, что если \bar{f}_1 ковариантное представление и \bar{f}_2 контравариантное представление, мы не можем сказать, что должно быть в правой части этого равенства: ab или ba . Мы по-прежнему имеем семейство преобразований, зависящих от $a \in G$. Эта зависимость будет непрерывной и мы можем записать её производную. Однако легко видеть, что произведение преобразований из этого семейства, вообще говоря, не принадлежит этому семейству.

Теорема 4.2.2. Пусть векторное пространство V является прямой суммой векторных пространств V_1 и V_2

$$V = V_1 \oplus V_2$$

Пусть \bar{f}_1 - представление группы G в векторном пространстве V_1 . Пусть \bar{f}_2 - представление группы G в векторном пространстве V_2 . Пусть геометрический объект \bar{v} является прямой суммой геометрических объектов $\bar{v}_1 \in V_1$ и $\bar{v}_2 \in V_2$

$$(4.2.5) \quad \bar{f}(a)(\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) = \bar{f}_1(a)(\bar{v}_1) \oplus \bar{f}_2(a)(\bar{v}_2)$$

Если представления \bar{f}_1 и \bar{f}_2 ковариантны, то отображение \bar{f} - ковариантное представление группы G в векторном пространстве $V = V_1 \oplus V_2$. Если представления \bar{f}_1 и \bar{f}_2 контравариантны, то отображение \bar{f} - контравариантное представление группы G в векторном пространстве $V = V_1 \oplus V_2$. Мы будем называть представление \bar{f} **прямой суммой представлений** и

$$\bar{\xi}(\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1(\bar{v}_1) & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_2(\bar{v}_2) \end{pmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы просто дифференцируем отображение (4.2.5). \square

4.3. Линейное представление группы Ли

Теорема 4.3.1. В случае линейного представления

$$(4.3.1) \quad v' = \bar{f}(a)(\bar{v}) \quad f^i(a)(\bar{v}) = f_j^i(a)v^j$$

базовый вектор представления имеет вид

$$(4.3.2) \quad \bar{\xi}(\bar{v}') = Iv' \quad \xi_L^i(\bar{v}') = I_{jL}^i v'^j$$

где мы определяем бесконечно малые образующие представления

$$(4.3.3) \quad I_{jM}^i = \left. \frac{\partial f_j^i}{\partial a^M} \right|_{a=e} \quad I = \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a=e}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если мы подставим

$$f^i(a)(\bar{v}) = f_j^i(a)v^j$$

в (4.1.2), мы получим

$$\xi_L^i(\bar{v}') = f^{-1}{}^i{}_k(b) \left. \frac{\partial f_j^k(b)}{\partial b^L} v'^j \right|_{b=e} = I_{jL}^i v'^j$$

\square

Теорема 4.3.2. Линейное ковариантное представление удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(4.3.4) \quad \frac{\partial v'^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i \lambda_r^L(a) v'^j$$

$$(4.3.5) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i f_k^j \lambda_r^L(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = If \lambda_r(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (4.3.4) является следствием равенств (4.1.4) и (4.3.2). Если мы подставим (4.3.1) в (4.3.4), мы получим

$$\frac{\partial f_c^a}{\partial a^M} u^c = I_{bL}^a \lambda_{lM}^L(a) f_c^b u^c$$

Отсюда следует (4.3.5). \square

Теорема 4.3.3. *Линейное контравариантное представление удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(4.3.6) \quad \frac{\partial u^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i u'^j \lambda_{lM}^L(a)$$

$$(4.3.7) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{jL}^i f_k^j \lambda_{lM}^L(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = I f \lambda_l(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (4.3.6) является следствием равенств (4.1.6) и (4.3.2). Если мы подставим (4.3.1) в (4.3.6), мы получим

$$\frac{\partial f_c^a}{\partial a^M} u^c = I_{bL}^a \lambda_{rM}^L(a) f_c^b u^c$$

Отсюда следует (4.3.7). \square

4.4. Алгебраические свойства линейного представления

Теорема 4.4.1. *Если представления f_1 и f_2 оба либо ковариантны, либо контравариантны и представление f является их тензорным произведением, то*

$$(4.4.1) \quad I = I_1 \otimes E_2 + E_1 \otimes I_2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенство

$$f(a) = f_1(a) \otimes f_2(a)$$

по a мы получим

$$(4.4.2) \quad \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f_1}{\partial a} \otimes f_2 + f_1 \otimes \frac{\partial f_2}{\partial a}$$

Мы получим (4.4.1) из (4.4.2) по определению, когда $a = e$. \square

Теорема 4.4.2. *Если f - линейное представление группы G в векторном пространстве M , то отображение $h(a) = f(a^{-1})$ также является линейным представлением группы G в векторном пространстве M*

$$(4.4.3) \quad I_{h \cdot jL}^i = -I_{f \cdot jL}^i$$

Если f - линейное ковариантное представление, то h - контравариантное представление

$$(4.4.4) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{f \cdot jL}^i f_k^j \lambda_{rM}^L(a) \quad \frac{\partial h_k^i}{\partial a^M} = -I_{f \cdot jL}^i h_k^j \lambda_{lM}^L(a)$$

Если f - линейное контравариантное представление, то h - ковариантное представление

$$(4.4.5) \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial a^M} = I_{f \cdot jL}^i f_k^j \lambda_{lM}^L(a) \quad \frac{\partial h_k^i}{\partial a^M} = -I_{f \cdot jL}^i h_k^j \lambda_{rM}^L(a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение, что h является ковариантным представлением, если f - контравариантное, следует из теоремы [1]-2.4.10. Аналогично доказывается утверждение, что h является контравариантным представлением, если f - ковариантное. Так как преобразование, обратное линейному, также является линейным, то представление h также является линейным.

Чтобы доказать теорему, мы должны найти бесконечно малые образующие представления h . Согласно равенству (4.3.3)

$$(4.4.6) \quad I_{h \cdot jM}^i = \frac{\partial h_j^i(a)}{\partial a^M} \Big|_{a=e} = \frac{\partial f_j^i(a^{-1})}{\partial a^M} \Big|_{a=e} = \frac{\partial f_j^i(a^{-1})}{\partial a^{-1.N}} \frac{\partial a^{-1.N}}{\partial a^M} \Big|_{a=e}$$

Очевидно, что

$$(4.4.7) \quad \frac{\partial f_j^i(a^{-1})}{\partial a^{-1.N}} \Big|_{a=e} = \frac{\partial f_j^i(a)}{\partial a^N} \Big|_{a=e} = I_{f \cdot jN}^i$$

Из равенства (3.1.34) следует

$$(4.4.8) \quad = \frac{\partial a^{-1.N}}{\partial a^M} \Big|_{a=e} = -\psi_{l \cdot K}^N(a^{-1}) \lambda_{r \cdot M}^K(a) \Big|_{a=e} = -\delta_M^N$$

Равенство (4.4.3) следует из равенств (4.4.6), (4.4.7), (4.4.8). \square

Теорема 4.4.3. Пусть векторное пространство V является прямой суммой векторных пространств V_1 и V_2

$$V = V_1 \oplus V_2$$

Пусть представления группы G в векторных пространствах V_1 и V_2 оба либо ковариантны, либо контравариантны. Тогда определено представление группы G в векторном пространстве V и

$$I_P = \begin{pmatrix} I_{1_{b_1 P}}^{a_1} & 0 \\ 0 & I_{2_{b_2 P}}^{a_2} \end{pmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно взять производную отображения

$$f(a)(v_1 \oplus v_2) = f_{1_{b_1}}^{a_1}(a)(v_1^{b_1} e_{a_1}) + f_{2_{b_2}}^{a_2}(a)(v_2^{b_2} e_{a_2})$$

\square

Дифференциальные свойства геометрического объекта

5.1. Ковариантная производная

Мы хотим изучить как меняются координаты геометрического объекта (4.3.1), когда мы движемся вдоль многообразия. Мы предполагаем, что $GL(n)$ - основная группа преобразований. Локальный базис имеет преобразование

$$a_l^k = \delta_l^k + \Gamma_{lp}^k dx^p$$

Следовательно,

$$v'^\alpha = v^\beta (\delta_\beta^\alpha + I_{\beta \cdot k}^\alpha (\delta_l^k - \Gamma_{lp}^k dx^p - \delta_l^k))$$

Если мы определим связность

$$\Gamma_{\beta p}^\alpha = I_{\beta \cdot k}^\alpha \Gamma_{lp}^k$$

то мы получим

$$Dv^\alpha = v'^\alpha - v^\alpha = -\Gamma_{\beta p}^\alpha v^\beta dx^p$$

Это позволяет определить ковариантную производную

$$v_{;k}^\alpha = v_{,k}^\alpha + \Gamma_{\beta p}^\alpha v^\beta$$

Рассмотрим коммутатор двух производных

$$\begin{aligned} v_{;kl}^\alpha - v_{;lk}^\alpha &= v_{;k,l}^\alpha + \Gamma_{\beta l}^\alpha v_{;k}^\beta - \Gamma_{kl}^p v_{;p}^\alpha - v_{;l,k}^\alpha - \Gamma_{\beta k}^\alpha v_{;l}^\beta + \Gamma_{lk}^p v_{;p}^\alpha \\ &= \underline{v_{,kl}^\alpha} + \Gamma_{\beta k,l}^\alpha v^\beta + \underline{\Gamma_{\beta k}^\alpha v_{,l}^\beta} + \Gamma_{\beta l}^\alpha (\underline{v_{,k}^\beta} + \Gamma_{\gamma k}^\beta v^\gamma) - \underline{\Gamma_{kl}^p v_{;p}^\alpha} \\ &\quad - \underline{v_{,lk}^\alpha} - \Gamma_{\beta l,k}^\alpha v^\beta - \underline{\Gamma_{\beta l}^\alpha v_{,k}^\beta} - \Gamma_{\beta k}^\alpha (\underline{v_{,l}^\beta} + \Gamma_{\gamma l}^\beta v^\gamma) + \underline{\Gamma_{lk}^p v_{;p}^\alpha} \\ &= (\Gamma_{\beta k,l}^\alpha - \Gamma_{\beta l,k}^\alpha + \Gamma_{\gamma l}^\alpha \Gamma_{\beta k}^\gamma - \Gamma_{\gamma k}^\alpha \Gamma_{\beta l}^\gamma) v^\beta + \underline{T_{kl}^p v_{;p}^\alpha} \end{aligned}$$

(5.1.1) $v_{;kl}^\alpha - v_{;lk}^\alpha = R_{\beta lk}^\alpha v^\beta - T_{lk}^p v_{;p}^\alpha$

5.2. Производная Ли

Векторное поле ξ^k на многообразии порождает бесконечно малое преобразование

$$(5.2.1) \quad x'^k = x^k + \epsilon \xi^k$$

которое приводит к **производной Ли**. Производной Ли говорит нам как геометрический объект меняется, когда мы движемся вдоль векторного поля.

Рассмотрим производную Ли для геометрического объекта (4.3.1). В этом случае мы имеем преобразование

$$a_l^k = \delta_l^k + \epsilon a_{,l}^k$$

Согласно (4.3.2) геометрический объект (4.3.1) имеет производную Ли

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_a v^\alpha &= \frac{v^\alpha(x') - v'^\alpha(x')}{\epsilon} = \frac{(v^\alpha + v_{;p}^\alpha \epsilon a^p) - f_\beta^\alpha(a) v^\beta}{\epsilon} \\
 &= \frac{v^\alpha + v_{;p}^\alpha \epsilon a^p - (\delta_\beta^\alpha + I_{\beta \cdot k}^\alpha (a_l^k - \delta_l^k)) v^\beta}{\epsilon} \\
 &= \frac{v^\alpha + v_{;p}^\alpha \epsilon a^p - v^\alpha - I_{\beta \cdot k}^\alpha (\delta_l^k + \epsilon a_{;l}^k - \delta_l^k) v^\beta}{\epsilon} = \\
 &= v_{;p}^\alpha a^p - I_{\beta \cdot k}^\alpha a_{;l}^k v^\beta
 \end{aligned}$$

Мы можем выразить эту производную через ковариантную производную

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_a v^\alpha &= (v_{;p}^\alpha - I_{\beta \cdot k}^\alpha \Gamma_{lp}^k v^\beta - \Gamma_p^\alpha) a^p - I_{\beta \cdot k}^\alpha (a_{;l}^k - \Gamma_{pl}^k a^p) v^\beta = \\
 &= v_{;p}^\alpha a^p - I_{\beta \cdot k}^\alpha a_{;l}^k v^\beta + I_{\beta \cdot k}^\alpha S_{pl}^k a^p v^\beta
 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Александр Клейн, Представление \mathfrak{F} -алгебры,
eprint [arXiv:0912.3315](#) (2010)
- [2] Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, перевод с ан-
глийского М. М. Постникова, М. Иностранная литература, 1947

Предметный указатель

базовый вектор представления группы
Ли 27

базовый оператор группы Ли 16

бесконечно малый генератор 30

вполне интегрируемая система 7

инфинитезимальные образующие группы
Ли 24

левоинвариантное векторное поле 24

левые структурные константы алгебры
Ли 22

определённая слева алгебра Ли группы
Ли 24

определённая справа алгебра Ли группы
Ли 22

полная система линейных
дифференциальных уравнений в
частных производны 10

правоинвариантное векторное поле 21

правые структурные константы алгебры
Ли 20

производная Ли 33

прямая сумма представлений 30

существенные параметры семейства
функций 11

тензорное произведение представлений
29

якобиева полная система
дифференциальных уравнений 11

Специальные символы и обозначения

$A_L^K(a, b)$	производная левого сдвига 15	$\psi_N^L(a)$	правый базовый оператор группы Ли 16
$A_l(a, b)$	производная левого сдвига в 1-параметрической группе Ли 18	$\psi_r(a)$	правый базовый оператор однопараметрической группы Ли 19
$A_r^K(a, b)$	производная правого сдвига 15		
$A_r^K(a, b)$	производная правого сдвига 15	$\varphi^L(a_1, a_2)$	операция на группе Ли 15
$A_r(a, b)$	производная правого сдвига в 1-параметрической группе Ли 18		
C_{lVT}^U	левые структурные константы алгебры Ли 22		
C_{rVT}^U	правые структурные константы алгебры Ли 20		
$\bar{\xi}(\bar{v}')$	базовый вектор представления группы Ли 27		
$\xi_L^a(\bar{v}')$	координаты базового вектора представления группы Ли 27		
\mathfrak{g}	алгебра Ли группы Ли 26		
\mathfrak{g}_l	определённая слева алгебра Ли группы Ли 24		
\mathfrak{g}_r	определённая справа алгебра Ли группы Ли 22		
$I_j^i M$	инфинитезимальные образующие представления 30		
I_{LM}^K	инфинитезимальные образующие группы Ли 24		
$T_a G$	касательная плоскость к группе G 16		
$\lambda_l(a)$	обратный оператор оператора ψ_l 16		
$\lambda_r(a)$	обратный оператор оператора ψ_r 16		
$\psi_L^L(b)$	левый базовый оператор группы Ли 16		
$\psi_l(b)$	левый базовый оператор однопараметрической группы Ли 19		